

WELTKARTEN

Produkt aus Weltbild, Erdkunde und Mathematik Geometrische Grundlegung der Vermessungslehre

Einleitung

Der Zweck dieses Lehrstückes ist es, die Studierenden der Bauingenieurabteilung zu einem Verständnis der Hintergründe der Schweizerischen Landesvermessung hinzuführen.

Nachdem der historische Übergang vom archaischen Bild einer flachen Erde zur Vorstellung der Kugelerde nachvollzogen worden ist, sind die Studierenden bereit, sich auf diese Erdkugel messend einzulassen. Im ersten Kapitel wird das globale Koordinatennetz aus der Natur der Sache entwickelt. Die ungleiche Einteilung der Kugel – in „Orangenschnitze“ bzw. „Kartoffelscheiben“ – wird einsichtig gemacht. Es ist dabei für uns Mathematiker einfacher, die Erde rotieren zu lassen als den Himmel. (Mit der Frage, ob sie das heliozentrische Weltbild auch verinnerlicht haben, provozieren wir die Studierenden absichtlich.) Wir könnten aber genausogut von der Himmelsdrehung sprechen, da es an dieser Stelle ja nur um kinematische Sachverhalte geht.

Ist das Koordinatensystem einmal eingeführt, so können wir im zweiten Kapitel daran denken, auf der (Erd-)Kugel Geometrie zu treiben, d.h. Längen und Winkel zu messen und zu berechnen. Am Beispiel der Flüge von Zürich nach Peking können diese Begriffe plastisch gemacht werden. Wie erstaunt sind wir doch, dass das Flugzeug zum Direktflug in nordöstlicher Richtung startet, liegt doch Peking südlicher als Zürich!

Das dritte Kapitel ist das Herzstück dieses Themenkreises. Hier geht es um Systeme und Methoden der Kartenprojektion. Wird hier also der Schritt zur Kugelerde, den die Menschheit in der Antike und dann noch einmal in der Neuzeit mühsam vollbracht hat, wieder rückgängig ge-

macht? Keineswegs! Weltkarten sind für viele Belange notwendige Hilfsmittel. Wer aber heute eine solche Karte gebraucht, ist sich bewusst, dass er nur ein Bild, eine Projektion der gewölbten Erde vor sich hat. Dies zeigt sich ja auch darin, dass jede Weltkarte notwendigerweise verzerrt ist. Wir werden lernen, dass es keine Karten gibt, welche Längenverhältnisse treu abbilden. Aus diesem Grund gibt es auch keine Karten, welche gleichzeitig winkel- und flächentreu sind. Lassen wir uns nicht blenden: Auch die so eindrücklichen Satellitenkarten, die so viele Details völlig scharf wiederzugeben scheinen, unterliegen demselben Mangel!

Zum Abschluss wird unser Weltbild ein weiteres Mal in Frage gestellt. Offenbar ist die Kugelerde ein geeignetes Modell für den Geographieunterricht, entspricht aber, wenn wir es genauer nehmen, nicht der Wirklichkeit. Unser Planet gleicht vielmehr einem Rotationsellipsoid; ein Äquatordurchmesser ist um $1/296$ grösser als der Abstand zwischen den beiden Polen. Soll dieser Aspekt quantitativ einlässlicher bearbeitet werden, so stellt dies hohe Ansprüche an die Studierenden. Mit der Frage nach dem geeigneten Modell ergibt sich zudem ein wichtiger philosophischer Aspekt.

Warum befassen wir uns hier mit *Weltkarten*, wo die Studierenden sich doch nachher mit der Landesvermessung auseinandersetzen müssen? Dafür haben wir drei Gründe: Erstens erscheinen die Probleme hier im Kilometermassstab und werden so durchsichtiger und verständlicher. Zweitens können an diesem Thema mathematische Begriffe und Werkzeuge entwickelt und eingeübt werden. Schliesslich erreichen wir damit auch die Grenze dieses Grundlagenkurses. Der Übergang von der Weltkarte zur Landkarte benötigt höhere mathematische Werkzeuge. Diese werden erst später bereitgestellt. Die konkrete Umsetzung kann dann in der Vermessungslehre erfolgen.

Von der Scheibenerde zur Kugelerde – eine Einstimmung

„Nachdem Kolumbus unseren Erdball abgerundet hatte, stürzte nichts mehr vom Rande ab.“ (Thor Heyerdahl, „Expedition Ra“)

Wie unsere Planskizzen („Krokis“) dienten die ältesten bekannten Landkarten, die im *dritten vorchristlichen Jahrtausend* von Ägyptern und

Babyloniern gezeichnet wurden, der schematischen Darstellung von Lagebeziehungen zwischen Ländereien.

Das Bedürfnis, die gesamte bekannte Welt kartographisch zu erfassen, muss früh bestanden haben. Ökonomische, politische und militärische Motive lassen sich leicht angeben. Denken wir nur an die Erkundungsfahrten der Ägypter an die *Südspitze Afrikas* (um 2420 v. Chr.) oder an die Eroberungszüge *Alexanders des Grossen* (um 330 v. Chr.). Mehr noch als eine Landkarte setzt eine Weltkarte ein Weltbild voraus.

Der älteste bekannte Entwurf einer *Weltkarte* findet sich auf einer babylonischen Tontafel aus dem *fünften Jahrhundert v. Chr.* In die vom Ozean umgebene Kreisscheibe sind die Erdteile Asien, Europa und Afrika schematisch eingezeichnet. Ein Weltbild, wie es ähnlich fast tausend Jahre später vom Kirchenvater Augustinus vertreten wurde und in Europa bis ins *16. Jahrhundert* verbreitet war.

Faszinierend ist, wie im *6. Jahrhundert v. Chr.* in *Griechenland* ein Ringen um das korrekte Weltbild anhebt. *Thales* lehrt, dass die Erde eine Scheibe mit aufgesetzter Himmelshalbkugel sei, während sie bei *Anaximander* ein frei schwebender Zylinder und bei *Pythagoras* eine Kugel ist.

Sorgfältige astronomische Beobachtungen stärkten die Theorie der *Kugelerde* und überzeugten die griechischen Naturwissenschaftler und Philosophen von der Kugelgestalt der Erde. *Aristoteles* (384–322 v. Chr.) führt zur Begründung der Kugelgestalt den Erdschatten auf dem Mond bei Mondfinsternissen, die Änderung der Höhenwinkel der Sternbilder, das Auftauchen eines Schiffes am Horizont an.

Die erwähnten aristotelischen Überlegungen geben den Studierenden ein ausgezeichnetes Beispiel eines wissenschaftlichen Erkenntnisprozesses. Naturphänomene werden beobachtet, und eine ordnende Erklärung wird gesucht. Allmählich bilden sich Vermutungen und Theorien heraus, die der kritischen experimentellen Prüfung unterzogen werden und schliesslich frühere, spekulativere Erklärungsversuche ersetzen. Lesenswerte Ausführungen zu diesen Überlegungen und den griechischen Kenntnissen über die Himmelsbewegungen finden sich bei Os-serman [12] und Simonyi [16]. Die philosophischen Zusammenhänge haben wir bei Russell [14] nachgeschlagen. Dank „Sofies Welt“ [5] konnten wir die griechischen Ideen einigermaßen zusammenhalten.

Mit dem Untergang der antiken Kultur ging dieses Wissen in Westeuropa für viele Jahrhunderte verloren. Bis ins *13. Jahrhundert* wurde das

abendländische Weltbild durch die *Kosmologie des Cosmas* geprägt. Dieser alexandrinische Kaufmann und Mönch verfasste im 6. Jahrhundert seine „*Topographia Christiana*“. In diesem Werk beruft sich Cosmas auf die Bibel und lehnt die Vorstellung von einer in der Luft schwebenden Erde ab. Cosmas beschreibt die bewohnte Erde als von Wasser umgebenes Rechteck. In dieser Vorstellung umfasste das bewohnbare Land Europa und den Nahen Osten mit Jerusalem als Zentrum.

„*Whatever knowledge man has acquired outside Holy Writ, if it be harmful it is there condemned; if it be wholesome, it is there contained.*“

(Augustinus, 354 - 430, zitiert in Kline [9])

„*Enthalten die Bücher das, was im Koran steht, dann sind sie überflüssig, bieten sie etwas anderes, dann sind sie schädlich. In jedem Fall gehören sie ins Feuer.*“

Dies soll Kalif Omar im Jahr 641 bei der Verbrennung der berühmten Bibliothek von Alexandria gesagt haben (zitiert in Simonyi [16]).

Erst um 1200 wurden die griechischen Erkenntnisse in Westeuropa wieder zugänglich. Im zwölften Jahrhundert übersetzte Gherardo di Cremona in Toledo die „*Geographia*“ von Ptolemäus ins Lateinische. Das Buch Die „*Sphäre*“ von Sacrobosco machte das Werk des Ptolemäus einem weiten Kreis bekannt, so dass die Kugelgestalt der Erde im 15. Jahrhundert bei den abendländischen Gelehrten akzeptiert war.

I Von der Windrose zur Positionsbestimmung

Globales Koordinatennetz zur Orientierung auf der Erdkugel

Nachdem wir den Weg von der flachen Erde zur Kugelerde nachvollzogen haben, befassen wir uns mit Fragen der *Orientierung* auf der Erdkugel. Wir treffen uns im Freien auf einem weiten Platz, der nach Süden hin offen ist. Es geht zunächst um die *lokale* Orientierung. Wie orientieren wir uns denn? Eine Groborientierung kann anhand der vier Himmelsrichtungen erfolgen. Wenn *eine* Himmelsrichtung bekannt ist, so ist ja schon die ganze *Windrose* festgelegt. Jetzt da die Sonne scheint und Mittag gerade vorbei ist, können wir in guter Näherung angeben, wo Süden ist. Weil wir dieses Thema im Februar behandeln, gibt es keine Probleme mit der Sommerzeit. (Dass für die Bestimmung der Südrichtung nicht die Zonenzeit, sondern die Ortszeit massgebend ist, werden wir an dieser Stelle noch verschweigen. Ebenso werden wir hier die

Zeitgleichung noch aus dem Spiel lassen. Kommt aber eine solche Präzisierung aus dem Publikum, so werden wir sie dankbar aufnehmen.) Wer sich schon mit Sonnenuhren befasst hat, wird an dieser Stelle den Vorschlag einbringen, die Südrichtung anhand der Schattenlänge zu bestimmen (vgl. Himmelsuhr, nach Wagenschein in: Berg/Schulze [3]).

Wir hatten Glück, dass es gerade 12 Uhr war. Wie wäre es denn um 13 Uhr? Können wir auch dann die Südrichtung mit Hilfe des Sonnenstandes bestimmen? Die Pfadfinder wissen, dass man dazu eine Uhr verwenden kann (diesmal als Winkelmesser!), sofern diese ein Zifferblatt hat. Man peile über Uhrzentrum und Ziffer I die Sonne an und halbiere den Winkel zwischen dieser Richtung und derjenigen vom Zentrum zur Ziffer XII. (Einsichtiger wäre dieses Verfahren bei Verwendung einer 24-Stunden-Uhr mit halb so schnellem Stundenzeiger. Denn eine Stunde ist ja der vierundzwanzigste Teil eines vollen Sonnenumlaufs.)

Gibt es noch andere Möglichkeiten, eine Himmelsrichtung festzulegen? Der Kompass wird genannt, auch der Polarstern, der nahe beim Himmelsnordpol steht. Wer hat diesen Stern schon mit eigenen Augen gesehen? Nicht ganz die Hälfte der Anwesenden. Wir vereinbaren, dass wir uns nächstens an einem Abend treffen, um den Sternenhimmel mit blossen Auge anzuschauen und den Polarstern zu suchen. Der Mond ist beinahe leer, und die Jahreszeit ist günstig – abends um sieben ist es dunkel.

Zurück im Schulzimmer unternehmen wir mit der Unterstützung des Globus eine Phantasiereise. Wir starten in Winterthur (47° 30' N, 8° 44' E) und fahren stets nach Norden. Wir durchqueren dabei Deutschland, dann Dänemark, Norwegen, den Nordatlantik, das nördliche Eismeer. So gelangen wir schliesslich zum Nordpol. Wie sieht es hier aus? Dunkel ist es hier und bitterkalt, denn es herrscht Polarnacht. Eigenartig und ungewohnt: Während eines vollen Jahres geht hier die Sonne nur einmal auf und einmal unter. *Es gibt hier jedes Jahr nur einen Tag und eine Nacht.* Keine eigentlichen Tageszeiten, dafür zwei extreme Jahreszeiten. Der Übergang ist kurz, man kann kaum von Frühling oder Herbst sprechen.

Ähnlich verhält es sich mit dem Südpol. Dorthin gelangen wir offenbar, wenn wir uns in Gedanken stets nach Süden bewegen. Die Bahn, die wir dabei beschreiben, ist ja nicht geradlinig, sondern kreisförmig. Wir bewegen uns dabei auf dem Längen(halb)kreis von Winterthur. Dieser wird auch *Meridian* oder Mittagslinie genannt, weil er sämtliche Orte mitein-

ander verbindet, in denen die Sonne zur gleichen Zeit im Süden bzw. Norden steht. Südlich durchquert der Winterthurer Meridian Italien, dann das Mittelmeer, wobei auch Korsika und Sardinien getroffen werden. Den afrikanischen Kontinent erreicht er in Tunesien, durchquert die Sahara und trifft den Südatlantik im Golf von Guinea. In diesem Südmeer durchmisst der Meridian einen Winkel von mehr als 60° , bis er schliesslich die Antarktis an der Princess Astrid Coast erreicht. Die andere Hälfte des Kreises könnte man Mitternachtslinie nennen: Wenn es auf dem Winterthurer Meridian Mittag ist, so ist auf dem gegenüberliegenden Halbkreis eben Mitternacht – und umgekehrt. Auf der Mitternachtslinie befindet sich – in der Südsee, nicht allzu fern von Neuseeland – der uns genau gegenüberliegende Punkt der Erde, der sog. *Antipode* ($47^\circ 30' S$, $171^\circ 16' W$).

Denken wir uns auch eine Reise, bei der es stets nach Osten geht, so gelangen wir nie zu einem Pol, sondern sind immer gleich weit vom Nordpol entfernt und bewegen uns auch auf einem Kreis. Dieser zweite Kreis hat einen kleineren Radius als der erste, es ist der Breitenkreis von Winterthur. Denselben Kreis durchlaufen wir, wenn wir westwärts statt ostwärts beginnen.

Nun gehört zu jedem Ort auf der Erdkugel ein Meridian und ein Breitenkreis. (Genau genommen stimmt das nicht ganz. Es gibt zwei Ausnahmen. Welche?) Auf dem Lehrerpult steht ein zweiter Globus. Darauf erkennt man allerdings keine Länder. Er ist blau eingefärbt und trägt ein Netz von Längen- und Breitenkreisen. Diese Kreise werden zur Positionsbestimmung benützt. Einige Studenten wissen, dass Länge und Breite zwei Winkel sind und wie sie auf dem Globus gemessen werden. Wesentlich weniger klar ist die Bestimmung von Länge und Breite des Standortes auf der wirklichen Erde. Über diese Frage wollen wir in der folgenden Stunde nachdenken.

Die Studierenden erhalten den Auftrag, über die Reise entlang des Winterthurer Breitenkreises einen kleinen Aufsatz zu schreiben. Dabei soll mit Hilfe eines Atlases die geographische Wirklichkeit beschrieben werden. Das Ergebnis könnte wie folgt aussehen:

Haben Sie gewusst, dass der Winterthurer Breitenkreis durch Garmisch-Partenkirchen in Bayern, Budapest und Debrecen in Ungarn geht und dass er nördlich des Schwarzen und des Kaspischen Meers verläuft? Dass er Cecerleg in der Mongolei trifft, die Taille der Pazifik-Insel Sachalin knapp verfehlt, den nördlichen Pazifik durchheilt, um westlich von Seattle auf nordamerikanisches Festland zu

stossen. Weiter trifft er den nördlichsten der Great Lakes, versteckt sich in den südkanadischen Wäldern und verlässt Amerika bei St. John's auf Neufundland. Nach der Überquerung des Atlantiks kehrt er wenig südlich der Steinreihen von Carnac (F) nach Europa zurück. Er durchquert zweimal die Loire, geht durch Liestal und Baden und schliesst sich in Winterthur.

In der folgenden Stunde haben die Studierenden Atlanten mitgebracht. So können wir jetzt Länge und Breite einiger markanter Punkte bestimmen: New York, London, Paris, Mt. Everest, Kilimandscharo usw. Umgekehrt sollen solche Punkte mittels ihrer Länge und Breite im Atlas aufgespürt werden.

Mit der Frage, woher man denn die Länge und die Breite von Winterthur kenne, knüpfen wir an das Thema der vorigen Stunde an. Präziser fragen wir, wie man mit einfachen Hilfsmitteln Länge und Breite des Standortes bestimmen könne. Jetzt schlägt die Stunde des Seglers unter den Studenten: „Die geographische Breite ist gleich dem Höhenwinkel des Polarstern.“ Die Idee dahinter ist subtil, denn die Blickrichtung zum Polarstern ist ja nicht ganz parallel zur Erdachse. Doch die *Parallaxe*, d.h. die Abweichung von der Parallelen, beträgt weniger als 10^{-4} Winkelsekunden!

Zur Breitenbestimmung kann auch der Winkel zwischen Mittagssonne und Zenit verwendet werden. Diese Messung wird wesentlich ungenauer als die obige; das Hauptproblem ist hier das Ausrichten des Messinstrumentes auf das Sonnenzentrum. Am einfachsten wird dieser Winkel am 21. März oder 23. September gemessen. Die Sonne steht am Mittag dieser Tage (sog. *Äquinoktien*, d.h. Tag- und Nachtgleichen) genau über dem Äquator. Somit ist die geographische Breite des Standortes (näherungsweise) gleich dem Winkel zwischen Mittagssonne und Zenit (vgl. Fig. 2).

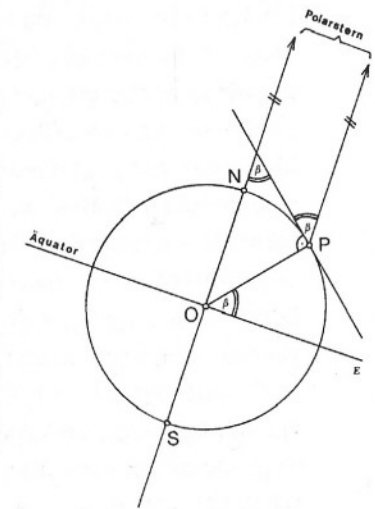


Fig. 1:
Breiten-
bestimmung
mit Hilfe des
Polarsterns

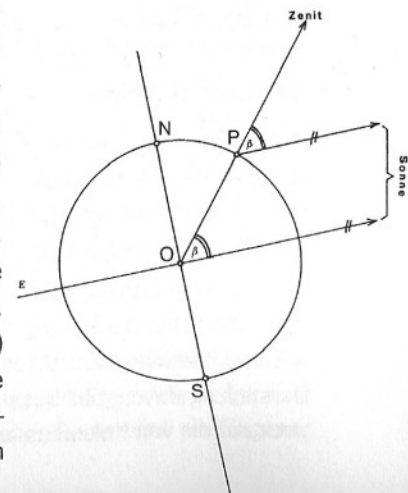


Fig. 2:
Breiten-
bestimmung
mit Hilfe der
Sonne

Am Mittag des 21. Juni bzw. 21. Dezember befindet sich die Sonne über dem nördlichen bzw. südlichen Wendekreis (Sonnen-Wende, lat. *Solstitium*). Die Breite dieser Kreise beträgt $23^{\circ} 27' N$ bzw. S . Also lässt sich auch dann durch Bestimmung der Mittagssonnenhöhe die Breite des Standortes berechnen.

Wie steht es mit der Längenbestimmung? Hier kommen uns unsere sehr exakt laufenden Uhren zu Hilfe. Diesmal darf es gewiss auch eine Digitaluhr sein. Wir vergleichen die Ortszeit von London-Greenwich (0° -Meridian) mit derjenigen von Winterthur. Die Zeitdifferenz verhält sich dann zu 24 Stunden wie die Längendifferenz (d.h. die Länge von Winterthur) zum vollen Winkel von 360 Grad. Wir rufen einen Bekannten in London an und fragen ihn nach der Ortszeit. Aus der Zeitdifferenz von genau 60 Minuten (das hätten wir eigentlich wissen müssen!) berechnen wir für Winterthur eine Länge von 15° . Ein Vergleich mit dem Atlas zeigt aber, dass unser Ergebnis um mehr als 6° zu gross ist. Wieviel Uhr ist es denn jetzt in Paris? Welche Zeit zeigt die Uhr in Wien? Wir befinden uns mit Wien und Paris in der mitteleuropäischen Zeitzone; unsere Uhren zeigen die Zonenzeit und nicht die Ortszeit. (In London hingegen stimmt die Zonenzeit mit der Ortszeit überein.) Und für die Bestimmung der geographischen Länge ist natürlich die Ortszeit massgebend. Umgekehrt können wir jetzt aus der geographischen Länge die Abweichung der Zonenzeit von der Ortszeit berechnen. Für Winterthur beträgt sie ca. 25 Minuten. Die so ermittelte Ortszeit ist nun allerdings die mittlere und nicht die wahre Sonnenzeit. Die Differenz zwischen der wahren und der mittleren Sonnenzeit nennt man *Zeitgleichung*; sie variiert zwischen -12 und +16 Minuten. Mitte Februar erreicht die Zeitgleichung ihr Minimum von -12 Minuten. Also steht dann die Sonne in Winterthur erst um 12 Uhr 37 im Süden.

Wir wissen jetzt, wie die Position bestimmt werden kann. Als Anwendung können wir nun auch nachvollziehen, wie die Menschen des Altertums den Erdumfang berechnet haben. Eine Studentin hat die richtige Idee. Von der Länge eines Meridianbogens zwischen zwei bekannten Breitenkreisen können wir auf den Erdumfang schliessen. Uns bleibt noch übrig, auf die Lösung des *Eratosthenes* und die Vermessung islamischer Geometer im 9. Jahrhundert hinzuweisen. Eine ausführliche Darstellung davon gibt Ossermann [12], der in diesem Zusammenhang auch auf die von Kolumbus an den iberischen Höfen entfachten Dispute

eingeht. Die Ausleuchtung der Diskurse unter portugiesischen und spanischen Gelehrten gäbe ein spannendes Stimmungsbild der damaligen naturwissenschaftlichen und politischen Ansichten.

Im Anschluss an diese Diskussion im Plenum werden Einzelaufträge erteilt. Die Studierenden sollen sich anhand von ausgewählten Texten (z.B. Lexikonartikeln) vertieft mit einem der in den letzten Stunden gestreiften Themen befassen und dazu ein Kurzreferat vorbereiten. Hier das Themenangebot:

Jahreslauf der Erde um die Sonne; Sonne und Mond; Kalender: Sonnenjahr, Sternjahr und Mondjahr; Ortszeit, Zonenzeit und Zeitgleichung; Sonnenuhren; Bestimmung der Tageslänge. Erdrotation und Präzession; Erdmagnetismus; Grundlagen des GPS (General Positioning System).

Bei der Bearbeitung dieser Themen haben wir den Studierenden völlig freie Hand gelassen. Entsprechend unterschiedlich war die Qualität der gehaltenen Kurzvorträge. Neben zwei ausgezeichneten Referaten über *Sonnenuhren* bzw. *Tageslänge* entstanden eine inhaltsarme Rede über den *Jahreslauf der Erde um die Sonne* und ein Vortrag zum *Kalender*, der mehr verwirrte als erhellte.

II. Von Zürich nach Peking fliegen Geometrie auf der Kugel: Geo-Metrie

Der Boden ist nun bereit für die nachfolgende Aufgabenstellung, mit deren Hilfe wir in kurzer Zeit ein Stück Kugelgeometrie erarbeiten können. Kollegin Regula Keller hatte die Gelegenheit, an einem Kongress in China teilzunehmen, an dem die UNO-Frauenkonferenz von 1995 vorbereitet wurde. Sie ist dabei von Zürich-Kloten nach Peking geflogen.

Berechnen Sie aus den Positionsangaben von Zürich-Kloten ($47^{\circ} 27' N$, $8^{\circ} 35' E$) und Peking ($39^{\circ} 56' N$, $116^{\circ} 23' E$) die Länge der Direktflugstrecke (in km) und die Abflugrichtung (d.h. den Winkel, den diese Richtung mit der Nordrichtung bildet).

Auf unserer 'Koordinatenkugel' zeichnen wir die ungefähre Lage von Kloten und Peking ein. Nun gibt es allerdings nicht nur viele Wege nach Rom sondern auch nach Peking. Auf welcher Route wird ein Flugzeug

von Zürich nach Peking fliegen? Die naheliegende Antwort kommt so gleich: Es wird mit unwesentlicher südlicher Abweichung praktisch ostwärts fliegen. Laut Kollege Heinz Juzi (der von 1974 bis 1989 in China regelmässig Projekte einer Schweizer Firma leitete) fliegt die Schweizer Fluggesellschaft Swissair erst seit 1976 nach Peking, zunächst mit Zwischenlandung in Bombay. Die Flugroute nach Bombay, welche – mit schwacher Südabweichung – Richtung Ost führt, war durch politische Gegebenheiten bedingt und ist deshalb nicht optimal. Mit dem Aufkommen der modernen Langstreckenflugzeuge können Ziele im fernen Osten im Direktflug erreicht werden. Seit 1986 gibt es direkte Flüge von Frankfurt nach Hongkong, und seit 1993 solche von Kopenhagen nach Peking. Welche Route würde für den Direktflug von Zürich nach Peking gewählt? Genau! Man nimmt jetzt den kürzesten Weg. Mit Hilfe eines Bindfadens versuchen wir auf dem Globus diesen Weg zu bestimmen. Welch eine Überraschung! Dieser Weg führt zunächst in nordöstlicher Richtung. Er beschreibt einen Grosskreisbogen. (Die Wirklichkeit ist allerdings etwas komplizierter. Es gibt z.B. sog. *Luftkorridore*, die eingehalten werden müssen.)

Für die Berechnung von Längen auf der Kugel werden die Studierenden mit etwas Hilfe sowohl Analogien als auch Unterschiede zur Längenberechnung in der Ebene erkennen. Das (schiefwinklige) Kugeldreieck erweist sich für unsere Zwecke als mächtiges Hilfsmittel. Wir betrachten das Dreieck mit den Ecken K (Kloten), P (Peking) und N (Nordpol). Sofort zu berechnen sind die Seiten NK und NP sowie deren Zwischenwinkel. Nun würde man ein Analogon zum Cosinussatz für ebene Dreiecke benötigen, um die gesuchte Seite KP zu berechnen; eine Art Sinussatz würde dann den gesuchten Winkel liefern. Ausnahmsweise suchen wir die passenden Formeln direkt im Formelbuch (z.B. Bartsch [2]). Unsere Suche ist erfolgreich, die benötigten Formeln heissen Seitencosinussatz bzw. Sinussatz des sphärischen Dreiecks (Bartsch [2], S. 206 ff). Im Prinzip ist die Aufgabe damit gelöst; die numerische Berechnung wird zu Hause ausgeführt.

Nach dieser Einführung sollte das Thema „Kugeldreieck“ noch etwas vertieft werden. Die oben beschriebene Aufgabe ist ein Spezialfall der zweiten Grundaufgabe des sphärischen Dreiecks. Insgesamt gibt es sechs solche Grundaufgaben. Dabei geht es jedesmal darum, aus drei vorgegebenen Stücken die restlichen Seiten und (oder) Winkel zu berechnen:

Grundaufgabe 1: Alle drei Seiten sind gegeben.

Grundaufgabe 2: Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,

Grundaufgabe 3: zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel,

Grundaufgabe 4: eine Seite und die beiden anliegenden Winkel,

Grundaufgabe 5: eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel,

Grundaufgabe 6: drei Winkel sind gegeben.

Die Lösungen dieser Grundaufgaben können von den Studierenden selbständig erarbeitet und in Kurzreferaten vorgestellt werden. Dasselbe gilt für die Beweise der dabei verwendeten Hilfsmittel (Sinussatz, Seitencosinussatz, Winkelcosinussatz).

Um unseren zukünftigen Bauingenieurinnen und -ingenieuren zu demonstrieren, dass die Erdkrümmung nicht nur bei grossen Entfernungen eine Rolle spielt, sondern bereits über kürzere Distanzen zu berücksichtigen ist, berufen wir uns auf den Schweizer Brückenbauer Othmar H. Ammann [20]. Mit einer Spannweite von 1298.45 m zwischen den Brückentürmen verbindet seine Verrazano Narrows Bridge Staten Island und Brooklyn (New York City) über die Mündung von New Yorks Upper Bay. Beim Bau der 198.35 m hohen Pylone musste die Erdkrümmung einbezogen werden. Ihre Spitzen sind nämlich 41 mm weiter auseinander als die Fundamente, was durch eine einfache Rechnung sofort bestätigt wird.

III. Von der Erdkugel zur Weltkarte Kartenprojektionen als geometrische Abbildungen

„Um also einen Frieden zu erreichen, so lasst uns eine Dimension denn streichen.“ (Hermann Hesse, „Glasperlenspiel“)

Die Requisiten für die folgende Stunde sind der (konkrete) Globus, je eine *Mercator*- und eine *Peters*-Weltkarte sowie eine Kugelkalotte. Es geht jetzt um den Übergang von der gekrümmten Erddarstellung des Globus zur ebenen Weltkarte. Wir konkretisieren diesen Übergang, indem wir versuchen, die Kugelkalotte glatt zu drücken. Wir erkennen, dass diese Glättung Probleme aufwirft. Am einfachsten ist es, durch regelmässig verteilte Einschnitte mehr oder weniger ebene „Schnitze“ zu erzeugen. Solche Weltkarten gibt es tatsächlich. (vgl. den Taschen-

Weltatlas von Diercke [4]. Dasselbe Problem stellt sich dem Hersteller eines Globus, wenn auch genau umgekehrt: Wie bringt er die ebenen Kartenteile auf die runde Kugel?) Die Herren Mercator und Peters haben das Glättungsproblem offensichtlich elegant, wenn auch auf sehr unterschiedliche Weise gelöst.

Wir bitten die Studierenden, den beiden Entwürfen weitere eigene hinzuzufügen. Dabei wird bald erkannt, dass der Kartenentwurf durch die Wahl des Netzes der Längen- und Breitenkreise festgelegt ist. Müssen die Bilder der Breiten- bzw. Längskreise auf jeder Karte zueinander senkrechte Scharen von Parallelen sein? Dem Atlas entnehmen wir rasch, dass eine solche Einschränkung nicht besteht. Bei einem einzigen selbstgemachten Entwurf sind sowohl Längen- als auch Breitenkreise gekrümmte Linien.

Durch das Skizzieren eigener Entwürfe hat sich der Blick für die Besonderheiten der beiden vorgestellten Karten geschärft: Bei der *Peters-Karte* (offizielle UNESCO-Karte) haben wir eine Einteilung des vollen Winkels in 400 Neugrad. Die Längenskala ist proportional, während die Breitenkreise gegen die Pole hin immer näher zusammenrücken. 10x 10-Neugrad-Felder sind am Äquator nicht als Quadrate sondern als schmale Rechtecke (d.h. mit kürzerer horizontaler Seite) dargestellt. Dies führt dazu, dass wir z.B. Afrika oder Südamerika als in der Ost-West-Richtung zusammengedrückt empfinden. In der Nähe der Pole sind diese Felder breite Rechtecke (mit wesentlich längerer horizontaler Seite). Deshalb wirkt Sibirien in Ost-West-Richtung auseinandergezogen. Bei der *Mercator-Karte* (offizielle NATO-Karte) werden Längen und Breiten im gewöhnlichen Gradmass gemessen. Auch hier ist die Längenskala proportional. Anders als bei der Peters-Karte rücken die Breitenkreise gegen die Pole hin immer weiter auseinander. Dies führt dazu, dass die polnahen Gebiete übermässig gross, die Pole selber hingegen gar nicht dargestellt werden. Beide Weltkarten sind also verzerrt.

Welches sind aber die Vorzüge dieser Karten? Wenn wir wissen, wozu die beiden Karten geschaffen wurden, können wir diese Frage leichter beantworten. Der Duisburger Kartograph *Gerhard Kremer* (Mercator) lebte vor mehr als 400 Jahren, also zu Beginn der Neuzeit. Das war die Zeit der grossen Entdeckungen. Weltkarten wurden damals für die Seefahrt gebraucht. Damit die Schiffe ihr Ziel erreichen konnten, mussten sie ihren Kurs – d.h. einen festen Winkel gegenüber der Nordrichtung –

einhalten. Von einer guten Karte erwartete man also, dass die Winkel darin treu abgebildet wurden. Und genau das leistet die Mercator-Karte; sie ist *winkeltreu*. Für den rot-grünen Historiker *Arno Peters* hingegen geht es nicht um die Politik des sechzehnten, sondern um diejenige des zwanzigsten Jahrhunderts, genauer um den Nord-Süd-Konflikt. Moderne politische Karten sollen die Grössenverhältnisse der Länder und Kontinente richtig wiedergeben. Eine solche Karte soll also Flächenverhältnisse treu abbilden. Diese Eigenschaft der *Flächentreue* ist in der Peters-Karte verwirklicht. (Es ist zu beachten, dass es bei der Flächentreue um den Inhalt und nicht um die Flächenform geht.)

Andererseits ist die Mercator-Karte offensichtlich nicht flächentreu, und die Peters-Karte ist auch nicht winkeltreu. Gibt es denn keine Weltkarten, welche beide Vorzüge in sich vereinigen? Eine mathematische Überlegung (die diesen Rahmen sprengen würde) zeigt, dass eine Karte, die gleichzeitig winkeltreu und flächentreu wäre, auch die Längenverhältnisse treu wiedergeben müsste. Das nachfolgende Argument zeigt aber, dass es keine längentreue Weltkarten geben kann. Folglich kann auch keine ebene Karte gleichzeitig winkel- und flächentreu sein.

Wir betrachten ein gleichseitiges Kugeldreieck ABC mit drei rechten Winkeln (z.B. ein Dreieck mit dem Nordpol als Ecke und einem Viertel des Äquators als gegenüber liegende Seite). Wir wählen nun eine fiktive längentreue Abbildung der Kugel auf eine Ebene, d.h. eine längentreue Karte. Das Kugeldreieck ABC wird dabei auf ein ebenes gleichseitiges Dreieck $A^*B^*C^*$ abgebildet.

Im Kugeldreieck sei jetzt H der Mittelpunkt des Bogens AB . Der Grosskreisbogen HC ist dann gleich lang wie die Seiten des Kugeldreiecks. Das Bild H^*C^* von HC ist aber die Höhe des Bilddreiecks und damit kürzer als die Seite A^*B^* . Dies widerspricht jedoch der Annahme, dass die Abbildung längentreu sei.

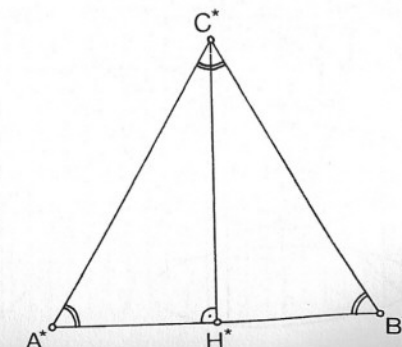
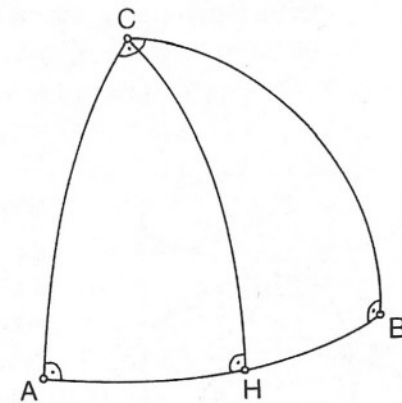


Fig. 3: gleichseitiges Kugeldreieck und gleichseitiges ebenes Dreieck mit entsprechenden Höhen

Das soeben angegebene Argument versagt offensichtlich, wenn der Ausschnitt der Erdkugel zu klein ist. Dass es auch für ein noch so kleines Gebiet der Kugel keine längentreue Karte gibt, kann jedoch ebenfalls mit Mitteln der Elementargeometrie eingesehen werden (s. Anhang).

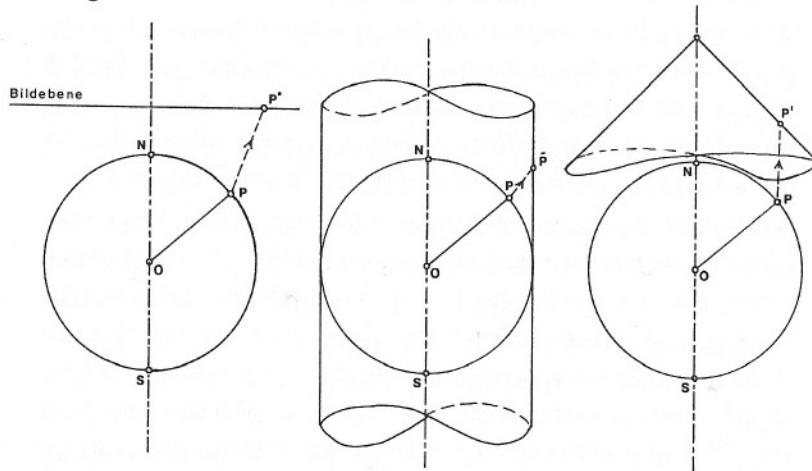


Fig. 4 bis 6:
Azimutalprojektion
Zylinderprojektion
Kegelprojektion
(von links nach rechts)

Heutige Atlanten werden digital hergestellt. Wie sehen denn die Rechenvorschriften oder eben die *Projektionen* aus, die zur Mercator- bzw. Peters-Karte führen? Man unterscheidet echte und unechte Projektionen. Die echten Projektionen – die Mercator- und die Peters-Projektion gehören zu diesen – zerfallen in drei Klassen: Azimutal-, Zylinder- und Kegelprojektionen (s. Fig. 4 bis 6).

Die Peters-Projektion ist eine Variante der auf *Archimedes* (287-212 v. Chr.) zurückgehenden Projektion der Kugel auf einen Zylinder, dessen Achse mit der Erdachse übereinstimmt. Schon Archimedes wusste, dass diese Projektion flächentreu ist. Es

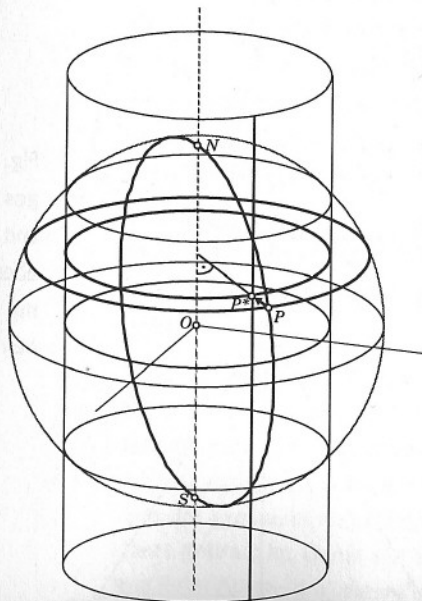
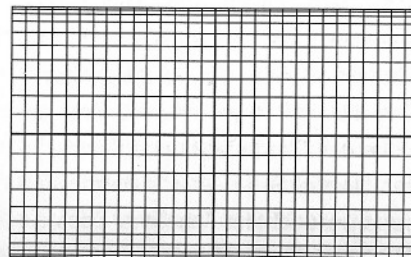


Fig. 7:
Peters-
Projektion
(links)

Fig. 8:
Gradnetz
der Peters-
Projektion
(rechts)



war allerdings erst der Mathematiker und Kartograph J. Lambert (1728-1777), der diese Idee zur Herstellung von Karten verwendete. Bei Archimedes ging es damals um die Bestimmung der Oberfläche einer Kugel. (Der Kartograph *Marinus* verwendete übrigens schon im ersten Jahrhundert n. Chr. einen der Peters-Projektion ähnlichen Zylinderentwurf; siehe [11], S. 211.)

Die Mercator-Projektion ist ebenfalls eine Zylinderprojektion, sie ist jedoch wesentlich schwieriger zu beschreiben als die Peters-Projektion. Ein Zugang, der auch mathematisch ergiebig ist, erfolgt auf dem Weg über die *Stereographische Projektion*. Diese bereits vom griechischen Astronomen Hipparch von Nikäa (ca. 190-120 v. Chr.) verwendete Abbildung ist eine winkeltreue Projektion auf die Äquatorebene *E*. Dabei wird die Nordhemisphäre nach folgender Vorschrift abgebildet:

Man verbinde den Südpol *S* geradlinig mit dem beliebigen Punkt *P* (der Nordhalbkugel) und schneide die Verbindungsgerade von *S* und *P* mit der Bildebene *E*. Der Schnittpunkt *P** ist dann das Bild von *P* (vgl. Figur).

An dieser Stelle führen wir den Begriff der *Loxodrome* ein. Dies ist eine Kurslinie, d.h. eine Kurve auf der Erdkugel, welche jeden Meridian unter demselben festen Winkel α schneidet. Da die Mercator-Abbildung eine winkeltreue Zylinderprojektion ist, müssen die Loxodromen dabei auf Geraden (mit der festen Steigung $m = \tan(90^\circ - \alpha)$) abgebildet werden. Bei der Stereographischen Projektion sind die Bilder der Loxodromen hingegen *logarithmische Spiralen*. Für den Übergang zur Mercator-Projektion brauchen wir somit

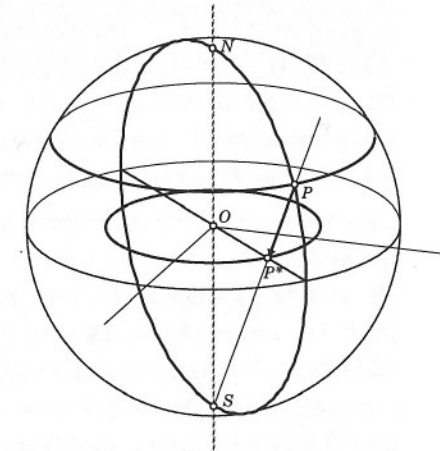


Fig. 9:
Stereographische
Projektion

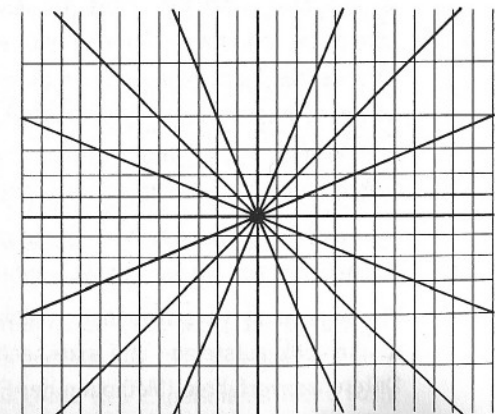
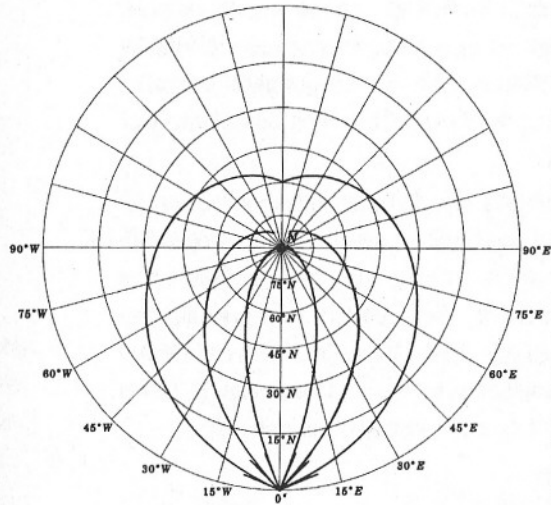


Fig. 10:
Gradnetz
mit
Loxodromen
bei der
Mercator-
Projektion.

Fig. 11:
Gradnetz
mit Loxodro-
men bei der
Stereogra-
phischen
Projektion



noch eine Abbildung der Ebene, welche vorgegebene logarithmische Spiralen auf eine vorgegebene Schar paralleler Geraden abbildet. Man verifiziert leicht, dass die Abbildung, welche die geographische Länge festhält und den Polabstand in den natürlichen Logarithmus seines Kehrwerts überführt, die verlangte Eigenschaft besitzt.

Bei der Konstruktion von Stereographischer Projektion und Mercator-Projektion kommen

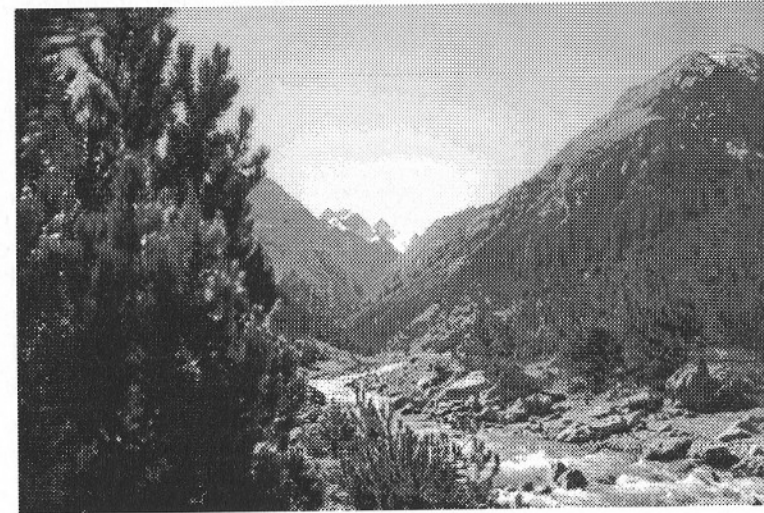
wir nicht an der jeweiligen analytischen Beschreibung vorbei. Obwohl die benötigten Werkzeuge schon eingeführt wurden, ist dieser Aspekt recht anspruchsvoll. Andererseits lässt sich mit diesen Beispielen der geometrische Abbildungsbegriff motivieren.

Ein weiterer Aspekt ist philosophischer Natur. Es geht um den Begriff des Modells. Die Studierenden lernen, dass sowohl die ebene Weltkarte als auch die Erdkugel (s. auch unten) lediglich Modelle sind. Es ist typisch für wissenschaftliches Vorgehen, dass zur Beschreibung der Wirklichkeit Modelle entworfen werden. Gibt es – wie in unserem Fall – verschiedene Modelle für denselben Wirklichkeitsbereich, so wird man deren Eignung für die jeweilige Problemstellung beurteilen müssen. Es ist uns klar geworden, dass das Kugelmodell der Wirklichkeit näher kommt als jede Karte. Andererseits sind geeignete Karten für manche Zwecke durchaus genügend. An dieser Stelle ist nun aber die Lehrperson ganz besonders herausgefordert. Sie wird sich entschieden dagegen wehren, dass eine Diskussion über solche Fragen den Fundamentalisten oder den Sophisten als Tummelplatz überlassen wird.

Mit dieser Etappe erreichen wir auf unserem Treck das Biwak auf der Hochebene, von wo wir Ausblick auf die Gipfel haben.

Wir können in verschiedensten Richtungen weiter in der Ingenieurmathematik aufsteigen und eine nachfolgende Vertiefung vorbereiten: Differenzenverfahren (Methoden der Finiten Elemente), Ausgleichsrechnung (Vermessung), Krümmungsbegriff, welcher später bei Problemen

des Strassen-, Tunnel- und Brückenbaus, in der Elastizitätstheorie eine wichtige Rolle spielen wird.



Einen Eindruck von einem dieser Gipfel, die vor uns aufragen, wollen wir noch geben.

Ausblick: Von der Kugelerde zum Geoid. Erdabplattung

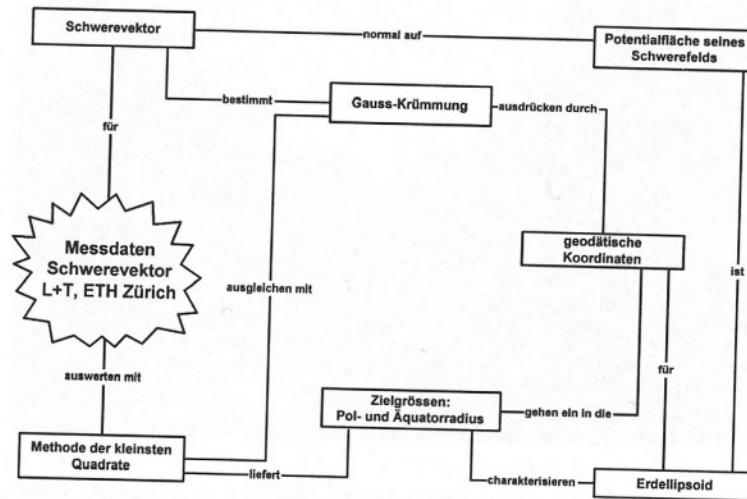
Vor mehr als zweitausend Jahren setzte sich bei den Griechen die Vorstellung von der *Erdkugel* durch. Durch die Kugelgestalt lassen sich viele geographische und astronomische Beobachtungen erklären. Sie genügt auch dem antiken Harmoniebedürfnis. Entspricht sie aber auch der tatsächlichen Form der Erde?

Einige Studierende behaupten, die Erde sei birnenförmig. Das Wort *Geoid* fällt. Um die Zweifel an der Kugelgestalt zu vermehren, führen wir ein kleines Experiment durch. Mit Hilfe eines Elektromotors lassen wir eine elastische, kreisförmige Lamelle schnell um einen Durchmesser rotieren. Wir beobachten eine elliptische Verformung, die wir auf die Wirkung der Zentrifugalkraft zurückführen.

Auch auf die massive, langsam rotierende Erde wirkt die Zentrifugalkraft. Die Auffassung von *Huygens* und *Newton*, die Erde gleiche einem *Rotationsellipsoid*, scheint uns aufgrund des Experiments nicht völlig

abwegig. Das nächste Etappenziel stellen wir den Studierenden anhand einer *Concept Map* vor. Wir verhehlen nicht, dass wir dabei die vorhandene Mathematik voll einsetzen werden und auch einiges hinzulernen müssen.

Fig. 12:
Concept Map:
Erdellipsoid



Wir wollen von einem Rotationsellipsoid, das die Erdgestalt gut wiedergibt, Äquator- und Polradius bestimmen. In der Realisierung dieses Teilprojekts fordern wir von den Studierenden ein richtiges Mass an *Eigenaktivität* (Bearbeitung von Lernaufgaben, Lektüre von Theorieunterlagen, Kurzvorträge). Selbstverständlich können wir nicht in die Methoden der (physikalischen) Geodäsie eindringen. Aber wir versuchen *a presentation of the subject along the lines its development might have followed* (M. Spivak) und eine Annäherung an den Ursprung der heutigen Vermessung und der Ausgleichsrechnung: an die *Untersuchungen über Gegenstände der Höheren Geodäsie* [6], die C.F. Gauss um 1820 im Zusammenhang mit der Vermessung des Königreichs Hannover unternahm.

Grob gesagt, besteht der Plan darin, die Gauss-Krümmung in einem bestimmten Flächenpunkt auf zwei verschiedene Arten auszudrücken. Dabei ist die Gauss-Krümmung das Produkt der kleinsten und der grössten Kurvenkrümmung in diesem Punkt.

Das Geoid, d.h. die Gleichgewichtslage des mittleren freien Meeresspiegels, ist eine Niveauläche des sog. Schwerepotentials. Die geometrische Form des Geoids ist die Unbestimmte der Geodäsie. Wir wollen sie durch ein massives Rotationsellipsoid annähern. Auf den gesuchten

Äquator- bzw. Polradius lässt sich schliessen, indem wir die Gauss-Krümmung in den Ellipsoidpunkten durch diese Grössen ausdrücken. Andererseits berechnen wir die Gauss-Krümmung näherungsweise aus den Änderungen des an der Erdoberfläche gemessenen Schwerevektors, der durch seinen Betrag und seine Lotabweichung bestimmt ist. Mit numerischen Methoden (Ausgleichsrechnung) schliessen wir dann auf die gesuchten Parameter des Ellipsoids. Ein Vergleich mit den offiziellen Daten der IUGG (International Union of Geodesics and Geophysics) gibt uns Aufschluss über die Genauigkeit unseres Vorgehens.

Unsere Methode ist aus der Sicht eines Geodäten völlig unzulänglich, weil wir auf die Schwierigkeiten der Schwerereduktion gar nicht eingehen – aber einen Eindruck der Anstrengungen und der Techniken, die für das Klettern auf die höchsten Gipfel noch nötig sind, haben wir erhalten!

Dank

Getreu dem Motto sind auch wir *öfter geklettert als geliftet*. Der Bergsche Esprit hat uns während dieser Kletterei immer wieder aufgemuntert und zum Weitersteigen angespornt. Durch sein sokratisches Stacheln – durch sein unermüdliches Hinterfragen und durch seine Auseinandersetzung mit unserer Arbeit – hat uns Christoph Berg viele Zusammenhänge erst erkennen und verstehen lassen. Wir danken Christoph Berg für seinen grossen Enthusiasmus, mit dem er uns immer wieder Vorbild ist, und für seine freundschaftliche Leitung der Winterthurer Exempel-Werkstatt.

Literatur

- [1] Anders, S.:
Weil die Erde rotiert. Harri Deutsch-Taschenbuch Bd. 45, Harri Deutsch-Verlag, Thun-Frankfurt a. M. 1985
- [2] Bartsch, H.-J.:
Taschenbuch mathematischer Formeln. Fachbuchverlag Leipzig-Köln, 15. Auflage, Leipzig-Köln 1993
- [3] Berg, H. Chr. u. Schulze, T.:
Lehrkunst und Schulvielfalt 2: Lehrkunst. Lehrbuch der Didaktik. Luchterhand-Verlag, Neuwied-Kriftel-Berlin 1995
- [4] Diercke:
Taschen-Weltatlas. dtv und Westermann
- [5] Gaarder, J.:
Sofies Welt – Roman über die Geschichte der Philosophie. Hanser-Verlag, München 1993
- [6] Gauss, C. F.:
Untersuchungen über Gegenstände der Höheren Geodäsie. Ostwalds Klassiker der exakten Wissensch. Nr. 177, Verlag W. Engelmann, Leipzig 1910
- [7] Jennings, G.A.:
Modern Geometry with Applications. Universitext, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1994
- [8] Kahle, H.G.:
Einführung in die Höhere Geodäsie. vdf Verlag der Fachvereine, Zürich 1985
- [9] Kline, M.:
Mathematics in Western Culture. Penguin Books, New York 1977
- [10] Lambacher, Th. u. Schweizer W.:
Kugelgeometrie. Themenhefte Mathematik, neu bearbeitet v. G. Groschopf. Klett Verlag, Stuttgart 1983
- [11] Mercator, G.:
Europa und die Welt. Begleitband zur Ausstellung: Verfolgt, Geachtet, Universal. Kultur- und Stadthistorisches Museum Duisburg, 1994
- [12] Osserman, R.:
Poetry of the Universe – A Mathematical Exploration of the Cosmos. Anchor Books, New York 1995
- [13] Peters A.:
Der Peters-Weltatlas. Akademische Verlagsanstalt, Vaduz 1989
- [14] Russell, B.:
Denker des Abendlandes. Eine Geschichte der Philosophie. Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1991
- [15] Schröder, E.:
Kartenentwürfe der Erde. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1988
- [16] Simonyi, K.:
Kulturgeschichte der Physik. Übersetzt von K. Christoph. Verlag Harri Deutsch, Thun-Frankfurt a. M. 1990
- [17] Spallek, K.:
Kurven und Karten. BI-Wissenschaftsverlag Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich, 2. Auflage 1994
- [18] Stein, W.:
Fahrplan der Weltgeschichte. Weltbild-Verlag, Augsburg 1994
- [19] Weigert, A./Wendker, H.:
Astronomie und Astrophysik – Ein Grundkurs. VCH, Weinheim 1989
- [20] Widmer, U.:
Othmar H. Ammann (1879–1965). 60 Jahre Brückenbau. Technorama Winterthur 1979

Anhang: Auch im Kleinen gibt es keine längentreuen Karten.

Im dritten Kapitel haben wir gezeigt, dass es keine längentreuen Weltkarten geben kann. Das dort verwendete Argument versagt allerdings, wenn der abzubildende Ausschnitt der Erdkugel zu klein ist. Die Tatsache bleibt jedoch für noch so kleine Flächenstücke bestehen und kann elementargeometrisch eingesehen werden. Die an solchen Details nicht interessierten Leserinnen und Leser mögen diesen Anhang gestrost ignorieren.

Für den Beweis nehmen wir das Gegenteil an. D.h. wir gehen aus von einem Flächenstück f auf einer Kugel und von einer fiktiven Abbildung Φ , welche f längentreu auf eine Ebene abbildet. Zur Vereinfachung nehmen wir an, die betrachtete Kugel habe den Radius 1. Für den beliebigen Punkt P von f bezeichnen wir mit P^* den Bildpunkt unter der Abbildung Φ . Wir wählen einen inneren Punkt O von f und einen (positiven) Abstand r so, dass sämtliche Punkte von f welche von O den Abstand r haben, noch zu f gehören. Gleichzeitig soll aber r kleiner als $\pi/2$ sein. Alle solchen Punkte liegen somit auf einem Kleinkreis k der Kugel mit dem Radius $\rho = \sin r$. Da die Abbildung Φ längentreu ist, liegen die Bildpunkte ebenfalls auf einem Kreis k^* . Dieser Kreis hat den Bildpunkt O^* von O als Zentrum, sein Radius ist r . Für eine noch so kleine positive Zahl r ist nun aber $\sin r$ echt kleiner als r . Also hat k einen kleineren Radius als k^* . Wir wählen nun eine genügend grosse positive ganze Zahl n so, dass das reguläre n -Eck mit dem Umkreis k^* den (konzentrisch in k^* gedachten) Kreis k nicht schneidet. Dieses n -Eck hat somit einen grösseren Umfang als der Kreis k , auf dem die Urbilder der Ecken des n -Ecks liegen. Wir folgern, dass das n -Eck zwei aufeinanderfolgende Ecken P_1^* und P_2^* besitzen muss, deren Abstand grösser ist als der Bogen von k zwischen den Originalpunkten P_1 und P_2 . Da k ein Kleinkreis ist, muss dieser Bogen jedoch länger als der sphärische Abstand seiner beiden Endpunkte sein. Dies widerspricht der Annahme, dass die Abbildung Φ längentreu sei.

Bildnachweis:

Gegenüber Seite 63:

Europa, Seekarte von Lucas Jansz, Waghenaer 1589, aus Mercator [11]