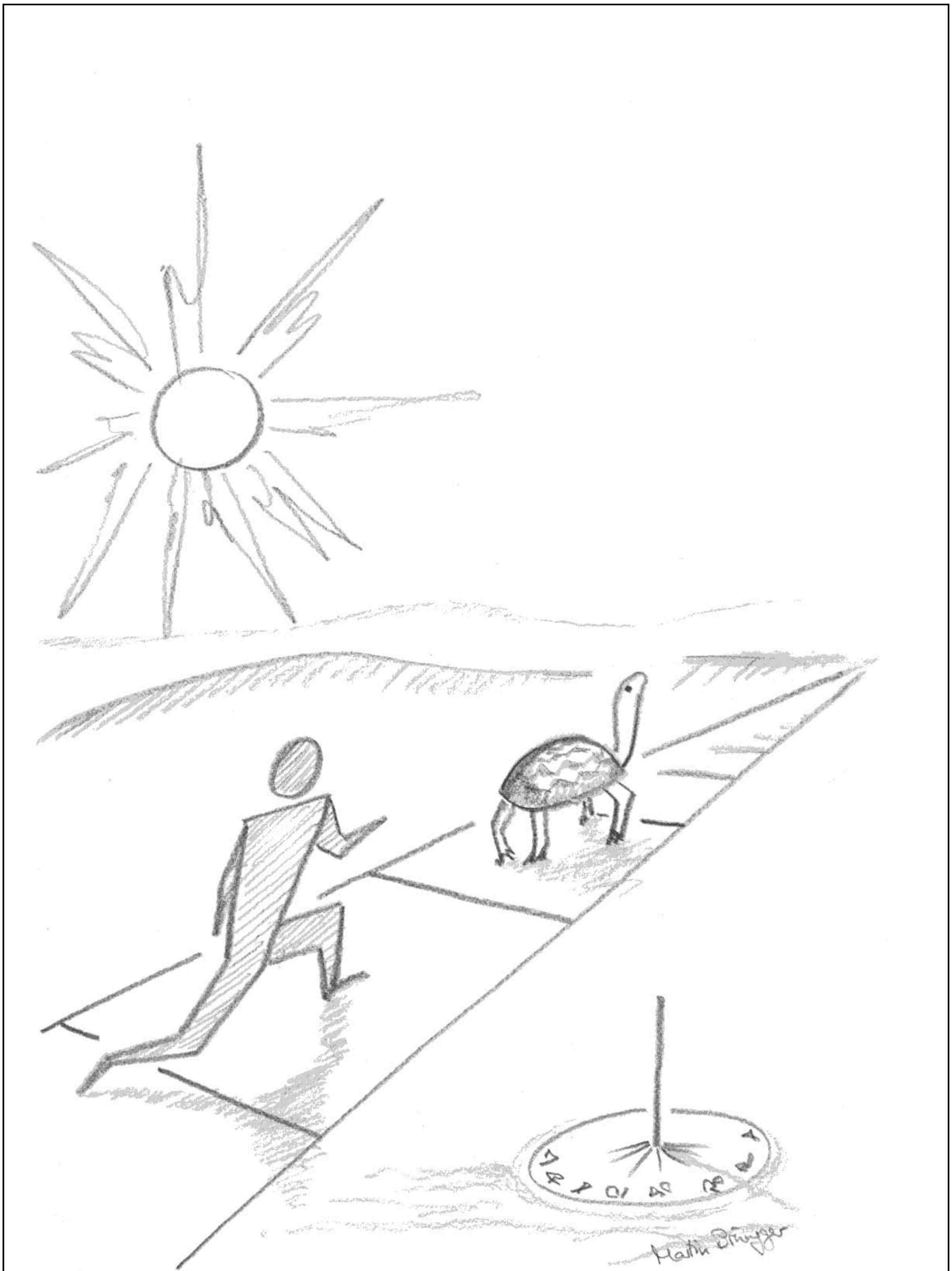
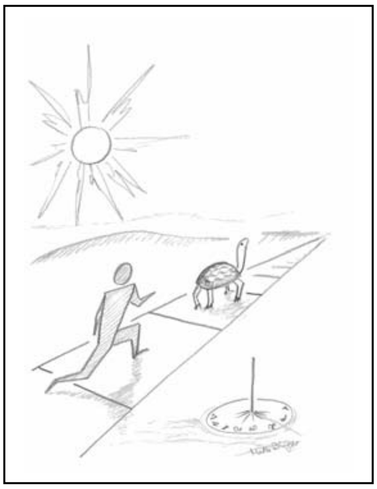


4. ACHILLES UND DIE SCHILDKRÖTE
Ein Lehrstück über geometrische Reihen und Grenzwerte für die 11. Klasse des Gymnasiums



4.1 Einleitung

Mit der Paradoxie „Achilles und die Schildkröte“ liegt ein wunderschönes Kernproblem vor, das Mathematiker wie Philosophen seit dem Altertum bis heute immer wieder intensiv beschäftigt hat. Der Umgang mit dem unendlich Vielen und dem unendlich Kleinen ist das zentrale Problem in der Mathematikentwicklung, das überall und immer wieder auftaucht. Poincaré soll einmal gesagt haben: Mathematik betreiben bedeute, Geschichten erzählen über das Unendliche. Diese Geschichten von Zenon gehören zu den schönsten und fruchtbarsten.

Zenons Geschichte von Achilles und der Schildkröte aus dem 5. vorchristlichen Jahrhundert ist uns dank Aristoteles überliefert. Hier liegt erstmals eine Auseinandersetzung mit dem Unendlichen und mit einem nicht abbrechenden Prozess genetisch echt vor uns. Sie bietet *einen* Zugang zum Verständnis von Grenzwerten, von Summen beliebig klein werdender Grössen am Beispiel der nicht abbrechenden geometrischen Reihe. Die Summe von unendlich vielen Gliedern einer Reihe wird manifest auf einer endlichen Strecke; das Unendliche im Endlichen wird denk- und greifbar. Diese infinitesimalen Prozesse können sowohl von geometrischer wie auch von rechnerischer Seite angepackt werden. Eine gelungene Verknüpfung der beiden Betrachtungsweisen führt zu einer grossen Bereicherung und Vertiefung des Verständnisses.

Wie in der Menschheitsgeschichte stellt Otto Toeplitz in seiner genetisch fundierten „Entwicklung der Infinitesimalrechnung I“ die Provokation von Zenon an den Anfang der Auseinandersetzung mit dem Infinitesimalen. Wir sind den unendlichen Prozessen bereits in der Annäherung an π bei Archimedes, bei den Primzahlen und bei der Irrationalität von Wurzel 2 begegnet. Hoffentlich wirken die damaligen Überlegungen nach. Jetzt legen wir konzentriert die Fundamente für Begriffe wie Konvergenz und Grenzwert, die uns hin zur Infinitesimalrechnung sowie zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und durch sie hindurch stets begleiten werden. Ohne diese beiden Wissenszweige sähe unsere heutige Welt ganz anders aus! Erstaunlich ist, dass diese herausfordernde Geschichte von Martin Wagenschein nie aufgenommen und für eine Unterrichtseinheit verwendet wurde.

Aristoteles: Physikvorlesung

Vier Bewegungstheoreme hat Zenon aufgestellt, die den Widerlegungsversuchen die grosse Mühe machen. Das erste Theorem wendet sich gegen eine Möglichkeit von Bewegung mit dem Argument, ein Gegenstand, der in Bewegung sollte sein können, müsste, bevor er an das Ende seiner Bahn kommen könnte, doch erst einmal an den Halbierungspunkt gelangt sein – ein Argument, auf das wir mit der erforderlichen Unterscheidung weiter oben bereits geantwortet haben. – Das zweite Theorem ist der sogenannte Achilleus; es lautet: Das Langsamste kann in seinem Lauf vom Schnellsten niemals eingeholt werden. Denn der Verfolger muss, bevor es zum Überholen kommen soll, erst einmal den Punkt erreicht haben, an dem der Verfolgte gestartet war (ein Verhältnis, das sich dauernd fortsetzt), so dass das Langsamere dauernd einen gewissen (wenn auch abnehmenden, so doch nie zu Null werdenden) Vorsprung behalten muss. Auch dieses Theorem ist im Grund wieder das (obige) Teilungstheorem, nur dass es sich hier nicht um fortlaufendes Halbieren der Strecke, die hier immer neu hinzukommt, handelt. Die These von der Nichteinholbarkeit des Langsameren gibt sich zwar als Resultat aus der angegebenen Begründung, kommt aber in Wahrheit aus derselben Quelle wie das Teilungstheorem – denn in beiden Fällen geht es um die angebliche Unerreichbarkeit des Wegzieles infolge einer Art Teilung der zu durchlaufenden Wegstrecke, nur kommt im zweiten Theorem noch als Besonderes die Steigerung hinzu, dass selbst das, was die Dichtung als Ausbund der Geschwindigkeit feiert, bei der Verfolgung des Langsamsten sein Ziel nicht zu erreichen vermag –; dementsprechend muss denn auch die Widerlegung bei beiden Theoremen in gleicher Weise erfolgen. Die Behauptung, was einen Vorsprung habe, werde nicht eingeholt, ist trügerisch. Solange freilich etwas einen Vorsprung hat, wird es gewiss nicht eingeholt; aber es wird sofort eingeholt werden können, wenn man nur zugibt, dass es möglich ist, eine endliche Strecke zu durchlaufen.

Aristoteles in Ernst Grumbach (Hrsg.): Physikvorlesung (1967, S. 173f)

Achilles und die Schildkröte

Von Zenon, dem Griechen, stammt die Geschichte über den Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte. Fair, wie man zu jener Zeit war, räumt Achilles dem offensichtlich unterlegenen Gegner einen bestimmten Vorsprung ein, sieht sich jedoch bereits kurz nach dem Start in ein auswegloses Problem verwickelt (nach Zenon): Wann immer Achilles den ursprünglichen Vorsprung der Schildkröte auch einholt, also an deren Startplatz anlangt: sie ist in der Zwischenzeit ein Stück weiter gekrochen. Und bis Achilles dieses durchläuft, hat die Schildkröte ebenfalls ein Stück Wegs geschafft. Gelangt Achilles dort an, so ist sie bereits wieder ein Stückchen weiter. Sicherlich läuft Achilles schneller als sein kriechender Gegner, und die Distanz zwischen beiden wird immer kleiner, aber es ist nicht zu übersehen, dass, wenn Achilles an irgendeinem Punkt der Rennstrecke ankommt, die Schildkröte inzwischen bereits dort gewesen sein muss.

Heinz Haber in „Das Mathematische Kabinett Folge 2“ (1974, S. 78)

Die Anfänge des infinitesimalen Denkens bei den Griechen

Es misst die erhabene Grösse eines Begriffs, wenn er den Zeitgenossen seiner Entstehung, wenn er denen, die ihm zuerst begegnen, als lächerlich erscheint. Die Paradoxien ZENOS geben uns das erste Signal von dem Auftauchen der Idee des unendlichen Prozesses aus einer Zeit, über deren geistiges Geschehen wir sonst nur dürftige Kunde haben. Zweifellos waren sie für ihren Autor nicht die Scherze, als die sie uns erzählt werden und als die die Form ihrer Einkleidung sie vielleicht darbietet. Schon ARISTOTELES streift in seinem Bericht, dem wir überhaupt im wesentlichen ihre Kenntnis verdanken, diese Aufmachung ab und formuliert so: „Ich vermag nicht von hier bis zur Wand zu gehen; denn dazu müsste ich zuerst die Hälfte dieser Distanz durchmessen, und dann vom Rest wieder die Hälfte, und von dem dann bleibenden Rest wieder die Hälfte, und mit diesem stets fortsetzbaren Prozess kann ich nie zu einem Ende gelangen.“ Es ist töricht zu meinen, ZENO hätte nicht gewusst, dass die Zeiten, die man zum Durchlaufen der sukzessiven Hälften gebraucht, ihrerseits auch immer kleiner werden. Er protestiert nur gegen den Abgrund des unendlichen Prozesses, an dem man beim Durchlaufen eines Kontinuums entlang schreitet, und er dokumentiert mit diesem Protest, den er mit jugendlicher Verve aufgeschrieben hat und den man fast gegen seinen Willen publiziert hat, dass zu jener Zeit man zuerst die Kühnheit besessen haben muss, solche Summationen von unendlich vielen immer kleiner werden Zeitteilchen, wie $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ vorzunehmen. Es ist interessant, damit einen der paar Wortfetzen zu vergleichen, die uns von ANAXAGORAS, also ebenfalls aus dem fünften vorchristlichen Jahrhundert, überliefert sind: „Es gibt kein kleinstes unter den Kleinen und kein grösstes unter den Grossen, sondern immer noch ein kleineres und ein grösseres.“ Infolge einer einseitigen Gewöhnung erscheinen uns heute diese Worte trivial. Sie waren es gewiss nicht in einer Zeit, wo die Atomistik Problem war, nicht die Atomistik, an die wir leicht denken, bei der im Raume der Geometrie diskrete materielle Atome verteilt liegen, sondern eine Atomistik, die mit einer diskontinuierlichen Struktur des Raumes selbst rechnet, mit der Möglichkeit, dass man eine Strecke nicht ins Unbegrenzte unterteilen kann. Über die glatte Absage an diesen Atomismus, die in den Worten des ANAXAGORAS gelegen ist, geht die in den Zenonischen Paradoxien gelegene Kritik weit hinaus; sie wendet sich – so undurchsichtig uns vieles an dem gegenseitigen Verhältnis von Eleaten, Pythagoräern und anderen Philosophenschulen ist – unzweifelhaft gegen irgendwelche erste positive Gehversuche in einer neuen Mathematik, die Gesetze eines systematisch denkenden Verstandes an Stelle der nahe liegenden, aus einer naiveren Anschaulichkeit entspringenden Phantasie der Atomistiker zu setzen unternimmt.

Wir sehen den eben berührten Konflikt bei den sogenannten Pythagoräern in dem Augenblick ausbrechen, wo sie das „Irrationale“ entdecken und damit denjenigen Tatbestand schaffen, der den Anlass zur Idee des unendlichen Prozesses gegeben hat und den auch bis heute noch wirksamen Untergrund dafür liefert.

Otto Toeplitz: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung I (S. 1f)

Für mich begann die erste Auseinandersetzung mit der Geschichte „Achilles und die Schildkröte“ in der ersten Berner Lehrkunstwerkstatt, in der ich Material dazu sammelte, mit der Absicht damit ein Lehrstück zur Differentialrechnung zu entwickeln. Plötzlich wurde ich aber von den geometrischen Körpern gepackt, und die Geschichte von Zenon geriet in den Hintergrund. Das spannende Thema nahm ich in meinem Urlaub in Marburg 2000/01 wieder auf und die Geschichte erlebte einen zweistündigen Unterrichtsversuch zusammen mit Beate Nölle. Es folgten die gedankliche Weiterentwicklung, zwei erste Gesamtinszenierungen 2001 sowie zwei weitere Inszenierungen 2003 in der Sekunda (11. Schuljahr) am Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld. Über die erste Inszenierung des Jahres 2003 werde ich im Folgenden berichten.

4.2 Struktur des Lehrstücks

Ouvertüre:

Mit einer Geschichte, welche die Menschheit schon bald 2500 Jahre beschäftigt, steigen wir in ein Lehrstück ein. Erstmals in der Menschheitsgeschichte wird dabei das „unendlich Kleine“ mit einem nicht abbrechenden Prozess thematisiert. Ohne diese Auseinandersetzungen in den verschiedensten Variationen wären die höhere Mathematik und damit unser heutiger technischer Stand undenkbar. Es folgen ein paar Erläuterungen über Zenon und Achilles, damit diese beiden Personen in den Köpfen bereits etwas Gestalt annehmen können.

I. Akt: Die unerhörte Geschichte von Zenon

Zenon tritt auf und konfrontiert mit der Geschichte „Achilles und die Schildkröte“. In Gruppen werden wortlose Darstellungen vorbereitet, welche die Kernaussage der Paradoxie möglichst treffend darstellen sollen. Es folgen die wortlosen Präsentationen. Wo finden wir das Zentrale der Geschichte besonders deutlich dargestellt? (Gespräch) Jeder zeichnet auf sein Blatt mit der Geschichte diejenige Darstellung, die er am treffendsten findet, und notiert sich ein paar Gedanken dazu.

II. Akt: Annäherung von Denken und Erfahrung

Wir versuchen, das was Zenon sagte, in Zahlen auszudrücken. Begriffe wie *Aufholvorgang, Annäherung, Rückstand* werden wichtig. Es folgt ein Experiment mit Gläsern: Was hat es uns zu sagen? Wir betrachten verschiedene konkrete Situationen: $v_S = 1/2 \cdot v_A$ und $v_S = 1/10 \cdot v_A$ und stellen die Rückstände und den von Achilles zurückgelegten Weg im Koordinatensystem dar. Was ist 1/9? Was sind 9/9?
Die unendlich vielen Aufholvorgänge rücken in eine endliche Zeit! Kann eine endliche Zeitspanne unendlich viele Teile haben? Philosophische und physikalische Fragestellungen werden aktuell.

III. Akt: Vom Konkreten zum Allgemeinen

Die erweiterte Vielfalt führt zur allgemeinen Erfassung: $v_S = q \cdot v_A$. Wir entwickeln die Formeln der abbrechenden und der nicht abbrechenden geometrischen Reihen und stellen das Gefundene in einen theoretischen Rahmen.

IV. Akt: Ausweitung und weitere Vertiefung der Problematik

Verschiedene Probleme lassen sich mit geometrischen Reihen bewältigen. Die Zenonsche Betrachtungsweise lässt sich vielfältig übertragen und liefert Resultate, die auch mit andern Ansätzen erhalten werden können.

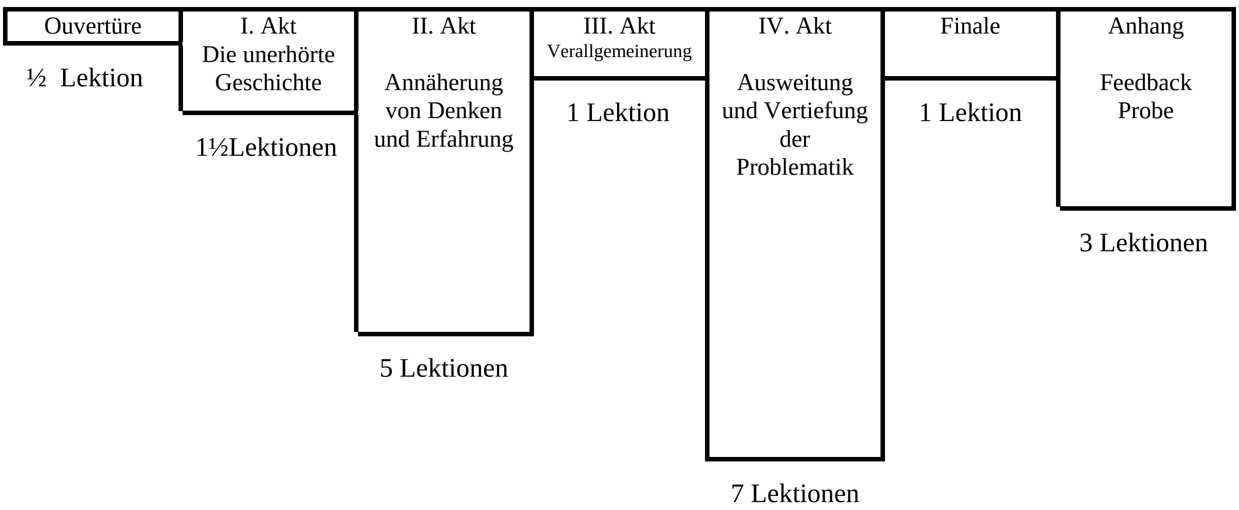
Finale: Wir betrachten nochmals die Geschichte, verfolgen den Lauf unserer Darstellungen, Gedanken und Argumente. Zur individuellen Standortbestimmung und da wir Zenon nicht persönlich antworten können, schreiben wir ihm Briefe.

4.3 Unterrichtsverlauf: 19 Lektionen in der Sekunda

Meine Klasse 2A steht unmittelbar am Anfang des 11. Schuljahres und hat noch zwei Jahre vor sich bis zur Matur. Zwar ist der Arbeitseinsatz der einzelnen Schülerinnen und Schüler nicht überaus gross, aber während der Stunden sind sie doch mehrheitlich interessiert und aktiv. Seit Beginn vor zwei Jahren haben wir ein gutes, ja freundschaftliches Verhältnis und ich arbeite gerne mit dieser Klasse. Sie ist sich schon einiges gewohnt von früheren Lehrstücken, das heisst, ich kann sicher sein, dass sie aktiv und konstruktiv mitwirken wird.

Im letzten Schuljahr haben wir uns unter anderem mit quadratischen Funktionen und Potenzrechnung befasst. Der Bereich Exponential- und Logarithmusfunktionen wurde noch nicht behandelt. Für gewisse Überlegungen wäre es vorteilhaft, dieses Wissen zur Verfügung zu haben, aber es ist keineswegs notwendig. Der Unendlichkeit in Form von unendlichen Prozessen sind die Schülerinnen und Schüler früher schon bei den Zahlmengen und Hilberts Hotel, bei den Primzahlen, bei der Irrationalität von Wurzel 2 und bei der Kreisberechnung von Archimedes begegnet.

Neu sind eine Schülerin und ein Schüler in der Klasse, die ich noch nicht kenne. Da lasse ich mich überraschen. Insgesamt sind es 11 Schüler und 6 Schülerinnen. Wir beginnen mit dem Lehrstück unmittelbar nach den Sommerferien, Mitte August 2003, und werden es nach 19 Lektionen mit einer Probe kurz vor den Herbstferien beenden. Es wird sich die folgende zeitliche Gliederung ergeben:

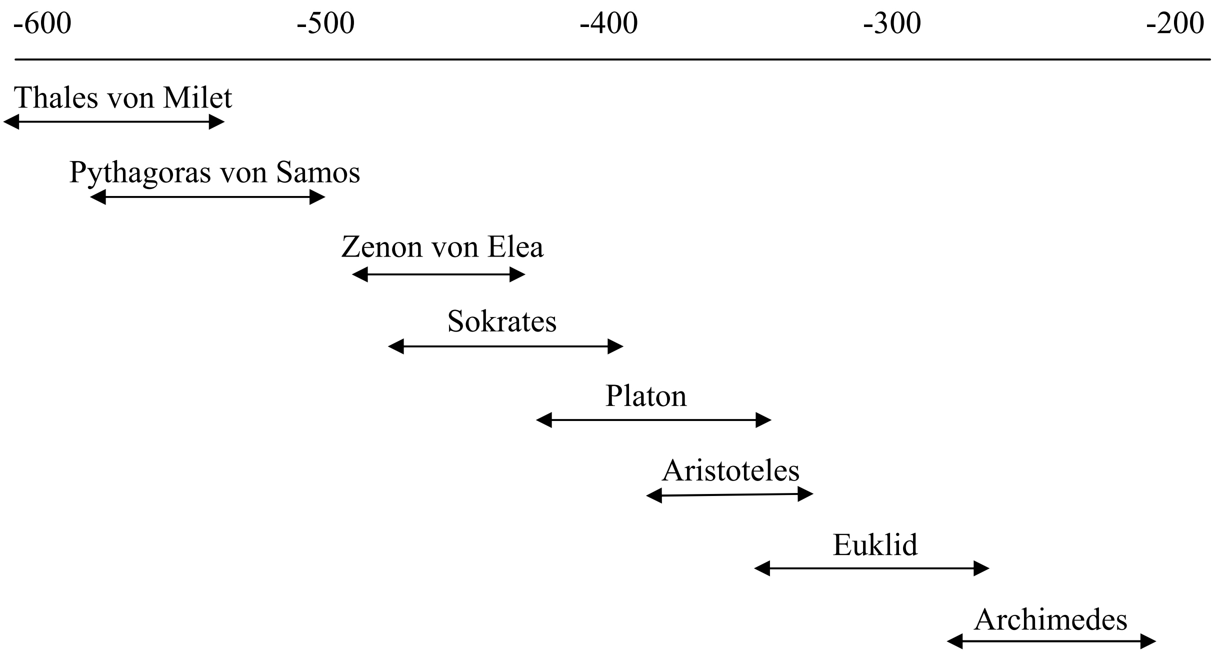


Lektionen 1/2

Ouvertüre:

Achtzehn Stühle sind im Halbkreis angeordnet. Vorn, das heisst im Zentrum des Kreises, steht einsam eine Säule. Ausserhalb des Halbkreises stehen Tischgruppen, an denen später gearbeitet werden kann. Schon beim Hereinkommen reagieren einige Schülerinnen und Schüler auf Stuhlanordnung und Säule. „Machen wir nochmals die Primzahlen?“ – „Kommt wieder ein Besuch?“ Ich begrüsse zum neuen Semester, zur zweiten Halbzeit an unserem vierjährigen Gymnasium. Mit Blick auf die Säule verweise ich bereits auf einen kommenden Besuch. Vorerst beziehe ich mich allerdings mit einigen Bemerkungen auf die vor den Ferien erhaltenen Rückmeldungen zum letzten Semester und versichere, dass ich weiterhin versuchen werde, eine sinnvolle und abwechslungsreiche Mischung von Unterrichtsmethoden anzubieten.

„Um unseren heutigen Gast besser zu verstehen, versetzen wir uns nach Griechenland, in eine Säulenhalle von Athen in eine Zeit um 450 vor Christus.“ Da zwei Schüler spontan nach hinten blicken, verweise ich auf das seit langem dort hängende Raffael-Bild „Schule von Athen“. Im Zentrum befinden sich Platon, der nach oben in das Reich der reinen Ideen zeigt, und Aristoteles, der sich mehr der Erde zuwendet. „Dies ist ein Treffpunkt, wo regelmässig bedeutende griechische Denker unter sich und mit dem interessierten Volk diskutieren. Bei ihnen befindet sich der weit herum bekannte, enthaltsam lebende und pflichtbewusste, 490 vor Christus in Elea bei Neapel geborene Zenon.“ Um ihn zeitlich einzuordnen, tragen wir einige der aus dem Geschichts- und früheren Mathematikunterricht bekannten Namen zusammen und ordnen sie.



„Zenon von Elea hat verschiedene Geschichten ausgedacht, um auf widersprüchliche Zusammenhänge aufmerksam zu machen und zum genaueren Hinsehen und Nachdenken herauszufordern. Die heutige Geschichte hat fast zweieinhalb Jahrtausende lang die verschiedensten Leute immer wieder zum Denken angeregt. Sie hat der Mathematik und der Philosophie wichtige Impulse geliefert und so wesentlich zur Entwicklung der sogenannten Infinitesimalrechnung beigetragen. Ohne diese sähe unsere heutige Welt ganz anders aus.“ Damit weise ich bewusst vorwärts auf Gewicht und Bedeutung der bevorstehenden Geschichte. Der neu zur Klasse gestossene Schüler Jason wirft spontan ein, das „infinite“ hätte doch sicher etwas mit „unendlich“ zu tun. Ich bekräftige, dass die Grundlage der Infinitesimalrechnung der Umgang mit sehr kleinen oder eben unendlich kleinen Grössen sei, die in unendlichen Prozessen entstünden, wie wir sie ja auch schon bei der Kreisannäherung von Archimedes oder beim Heronschen Verfahren zur Bestimmung von Wurzel 2 kennen gelernt hätten. Erstmals in der Menschheitsgeschichte seien aber diesbezügliche Gedankengänge bei Zenon von Elea in seinen Geschichten verbürgt. „In der Geschichte begegnen wir Achilles, dem Sohn des Königs Peleus und der Meeresgöttin Thetis.“ An dieser Stelle will ich einiges über Achilles und seine Ferse erzählen, aber ich höre Nadine, wie sie das Stichwort „Achillessehne“ zur Nachbarin flüstert. Dieses greife ich auf und gemeinsam entsteht ein Bild von Achilles und seiner Zeit: Seine Mutter wollte ihn durch ein Bad im Fluss der Unterwelt

Styx unsterblich machen; an den Fersen blieb er aber verwundbar. Noch heute sprechen wir von der Achillesferse, wenn wir eine schwache, verwundbare Stelle meinen. Dieser Achilles wirkte als hervorragender Kämpfer bei Troja und galt als schnellster Sprinter aller Zeiten. Insbesondere Philippe, ein sehr an Geschichte interessierter Schüler, ergänzt in Kürze die wesentlichen Ursachen und Umstände der Kriege um Troja. Ich staune über sein Wissen. Die Klasse ist sich dies von ihm gewöhnt.

Damit nicht sofort nach der Geschichte eine heftige Diskussion einsetzen wird, kündige ich jetzt schon an: „Nach dem Auftritt von Zenon wollen wir noch nicht über die vorgetragene Geschichte diskutieren, sondern uns vorerst anders mit ihr auseinandersetzen."

I. Akt: Die unerhörte Geschichte von Zenon

Nachdem jetzt etwa 20 Minuten verstrichen sind, stehe ich auf, wende mich kurz ab, ziehe ein weisses Hemd über und trete als Zenon an die Säule mit einer kleinen Schildkröte aus Stoff in der Hand. Die Geschichte erzähle ich frei nach der Darstellung in „Das Mathematische Kabinett. Folge 2" (Hrsg. Heinz Haber, dtv 1974):

„Meine lieben Athenerinnen und Athener. Es freut mich sehr, dass ihr nach den Ferien zur Fortsetzung wiederum so zahlreich, ja noch zahlreicher als bisher, erschienen seid. Und ich hoffe, euch auch heute nicht zu enttäuschen. – Seid ihr euch bewusst, dass Achilles, unser grosser Held vor Troja und schnellster Sprinter aller Zeiten, eine Schildkröte im Wettlauf nicht einholen kann? Fair wie er ist, räumt Achilles dem vermeintlich unterlegenen Gegner einen bestimmten Vorsprung ein, sieht sich jedoch bereits kurz nach dem Start in ein auswegloses Problem verwickelt. Wann immer Achilles den ursprünglichen Vorsprung der Schildkröte auch einholt, also an deren Startplatz anlangt – sie ist in der Zwischenzeit ein Stück weiter gekrochen. Und bis Achilles dieses durchläuft, hat die Schildkröte ebenfalls wieder ein Stück Wegs geschafft. Gelangt Achilles dort an, so ist sie bereits wieder ein Stückchen weiter. Sicherlich läuft Achilles schneller als sein kriechender Gegner, und die Distanz zwischen beiden wird immer kleiner, aber es ist nicht zu übersehen, dass, wenn Achilles an irgendeinem Punkt der Rennstrecke ankommt, die Schildkröte inzwischen bereits dort gewesen sein muss. Somit wird klar, dass Achilles die Schildkröte nie einholen, geschweige denn überholen wird."

„Ich sehe ungläubige Gesichter, Kopfschütteln und höre ein Raunen. Lasst mich doch meine Geschichte wiederholen." Noch gewichtiger beginne ich von Neuem: „Wahrlich, ich sage euch: Achilles, unser grosser Held vor Troja und schnellster Sprinter aller Zeiten, wird eine Schildkröte im Wettlauf nicht einholen können . . ." – Nach längerem Blick ins Halbrund bewegt sich Zenon langsam von der Säule weg, zieht sein Hemd aus und ich setze mich wieder an den Rand des Halbkreises. Solange es ruhig ist, lasse ich die Geschichte nachwirken.

Um sich wirklich mit der Aussage von Zenon zu befassen und noch etwas tiefer in den Widerspruch zwischen Alltagserfahrung und Verstand einzutauchen, ist es mir an dieser Stelle sehr wichtig, die offene Diskussion nicht gleich losbrechen zu lassen. Deshalb ergreife ich die Initiative: „Seht ihr Möglichkeiten, den Inhalt dieser Geschichte möglichst im Sinne von Zenon, aber *ohne Worte* darzustellen, zu veranschaulichen?“ Manuela schlägt vor, das Ganze mit Bildern darzustellen. Philippe erwähnt ein Weg-Zeit-Diagramm. Ich notiere die vorhandenen Vorschläge je auf einen Papierstreifen, lege sie in die Runde und ergänze durch eine Reihe weiterer Möglichkeiten:

Weg-Zeit-Diagramm	Bilderfolge	Graphik	Parallelgeschichte
Mittels zweier Figuren	Theatersequenz	Tonfolge singen	Gitarre

Maximal vier Schülerinnen oder Schüler sollen sich um ein Thema gruppieren. Notfalls arbeiten zwei Gruppen mit der gleichen Darstellungsart. Der Wahlprozess verläuft heute sehr schleppend. Schliesslich entstehen doch nur vier Gruppen mit den Methoden „Bilderfolge“, „Weg-Zeit-Diagramm“, „Theatersequenz“, „Mittels zweier Figuren“. Für die Vorbereitung der Präsentation stehen 20 bis 30 Min. zur Verfügung. Das Ziel wird von mir mehrmals klar betont: Wortlos soll möglichst deutlich dargestellt werden, was Zenon mit dieser Geschichte ausdrücken will. Jede Gruppe erhält den Text schriftlich, um ihn nochmals lesen zu können und sich daran zu orientieren. Material steht zur Verfügung. Bilderfolgen, graphische Darstellungen usw. erbitte ich auf Packpapier. Dies erlaubt mir, die entsprechenden Darstellungen auch später sofort wieder aufhängen und darauf Bezug nehmen zu können. Es folgen noch Fragen wie: „Geht der Wettlauf geradeaus oder im Kreis?“ – Ich antworte: „Es gibt Rennen auf Rundbahnen und es gibt Streckenläufe, wie den Marathonlauf.“ – Und wieder kann uns Philippe informieren, diesmal über den Lauf von Marathon. Ich bin beeindruckt.

In den vier Gruppen wird jetzt die Präsentation vorbereitet. Ein gutes Zeichen ist, dass die Diskussion losgeht, zum Teil sehr intensiv. Zwei der Gruppen arbeiten und diskutieren weit in die Pause hinein. Simon ist recht verwirrt und fragt mich: „Das geht doch nur, wenn Achilles langsamer wird?“ Im Text steht aber nichts davon! Die Damengruppe mit der Bildersequenz sucht noch nach einem Begriff. „Wie heisst das, wenn sich zwei Kurven beliebig nahe kommen?“ – „Asymptote?“ Sie sehen offenbar schon klar dieses asymptotische Verhalten. Da in den Gruppen viele kontroverse Gespräche laufen und ein intensiver Prozess in Gang kommt, braucht die Vorbereitung der Präsentation viel Zeit. Eine fruchtbare Zeit! Nach einem Drittel der zweiten Lektion sind dann alle vier Gruppen bereit für die Präsentation.

Die Bilderfolge wird an der Tafel aufgehängt und wortlos eine Weile betrachtet. Sie zeigt sehr schön die einzelnen Aufholvorgänge der beiden, wie sich Achilles von hinten immer mehr nähert. Interessant ist die einfache Sonnenuhr, welche den Ablauf der Zeit anzeigt. Dann folgt daneben ein Weg-Zeit-Diagramm, das zum Glück eher zu einer Darstellung der verschiedenen Stadien geworden ist und nicht verständlich wird. Im langen Gang draussen verfolgen wir die Theaterszene, gespielt durch Betime und Jan. Erst durch Intervention der andern Schüler wird nach jedem Aufholvorgang ein Stopp eingeschaltet. Das Klatschen eines Schülers automatisiert dann den Ablauf. Wir hören, dass das Klatschen in immer kürzeren Abständen erfolgt. Jede bewegte Darstellung wird mindestens zwei- bis dreimal langsam wiederholt, auch rückwärts. Mit „Sprung und Stopp", „Sprung und Stopp" lassen sich die einzelnen Sequenzen, die Aufholvorgänge, deutlich voneinander abgrenzen. Einwand von Simon: „Man darf nicht anhalten, unterbrechen, die beiden bewegen sich ununterbrochen durch, und dann holt Achilles die Schildkröte ein." Meine Rückfrage: „Aber wie machen wir dann das Anliegen von Zeno deutlich? Könnten wir am Ende jedes Aufholvorgangs ein Bild, ein Foto machen und die beiden Läufer nicht behelligen?" Bei der Darstellung mittels zweier Kartonfiguren an der Tafel beginnen wir am Ende jedes Aufholvorgangs auf den Tisch zu klopfen. Wann hören wir den letzten Klopfer? Eigentlich gibt es ihn nicht! Wir haben den Konflikt klar. Ich formuliere es so: „Zenon ist natürlich nicht dumm, und er weiss genau, dass in Wirklichkeit Achilles die Schildkröte überholt. Aber er ist provokant und bringt einen Konflikt auf den Punkt. Die Augen und die Erfahrung sagen ‚Ja, Achilles überholt', der Verstand sagt ‚Nein, Achilles bleibt immer hinten'." Mit der Zuspitzung dieser Verwirrung entlasse ich für heute die Klasse. Dies ist das Ende der ersten Doppelstunde!!!

II. Akt: Annäherung von Denken und Erfahrung

An der Tafel hängt die Bildsequenz vom vergangenen Mittwoch und in der Mitte der Text mit der Geschichte von „Achilles und die Schildkröte“. Darunter habe ich eine Rennstrecke und unsere beiden Akteure in den Startpositionen gezeichnet. So haben wir die Geschichte fürs erste vor Augen. Marcel und Michel bitte ich nach vorn, um uns nochmals vorzuspielen, was Zenon uns erzählt hat. Mit „Sprung und Stopp“, „Sprung und Stopp“, . . . können wir die verschiedenen Aufholvorgänge klar vergegenwärtigen. Natürlich wird die Kritik wieder laut, die beiden würden ja nicht stoppen unterwegs. Ich bitte um kontinuierlichen Lauf und Jan soll immer dann klatschen, wenn es vom einen Aufholvorgang zum nächsten geht. Wir hören gut, wie sich diese Klatscher immer rascher folgen, eigentlich ohne Ende! Und so stehen wir jetzt also wieder mitten in unserem Widerstreit von Verstand und Erfahrung. „Gibt es einen Weg, ein Vorgehen, wie wir diesen Widerstreit bearbeiten könnten? Simon, beharrlich wie er ist, insistiert wie letztes Mal: „Es geht nur, wenn Achilles immer langsamer wird. Sonst überholt er.“ Ich insistiere ebenfalls: „Zenon sagt nichts von einer Ermüdung von Achilles, er ist ein Superathlet. Beide Kontrahenten bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit.“ Achim meint, wir könnten die Sache graphisch lösen und versucht es an der Tafel mit linearen Funktionen, wie wir sie vor bald zwei Jahren behandelt haben. Zum Glück gelingt ihm die Darstellung nicht auf Anhieb.

Ich lasse die Klasse Dreiergruppen bilden mit der Aufgabe, graphisch oder zahlenmässig der Sache auf den Grund zu gehen und die Überlegungen auf einem A3-Blatt festzuhalten. So soll eine Vielfalt von Vorschlägen zustande kommen, die konstruktiv weiterführen kann. Aus den Kleingruppen kann ich einiges aufschnappen. Ramona meint, mit einem Weg-Zeit-Diagramm könne das nicht gehen, denn da sehe man ja, dass Achilles überholt. Nadine zeichnet eine Funktion, die asymptotisch gegen die x-Achse abnimmt. Diese beiden Gruppen vereinigen sich und es entsteht eine Graphik, die eben beide Ansätze in sich zu vereinen sucht. Simon zeichnet mehrere Diagramme, weil er nicht alles zusammenbringt. Philippe, Roman und Jason zeichnen ein Weg-Zeit-Diagramm. Auf meine Nachfrage hin, wo da Zenon mit den Aufholvorgängen Platz hätte, zeichnen sie ganz sanft, aber absolut korrekt einige Aufholstufen ein. Da ist schon mal ein wichtiger Erkenntnisschritt im Ansatz vorhanden. Auf einem andern Blatt finden wir nebst einer graphischen Darstellung eine Zahlenfolge 1 , 1/2 , 1/4 , 1/8 , 1/16, usw.. Auch hier steckt ein fruchtbarer Ansatz und ich denke bereits an meine kommende Präsentation der Gläser. Die beendeten Darstellungen werden an die Tafel gehängt.

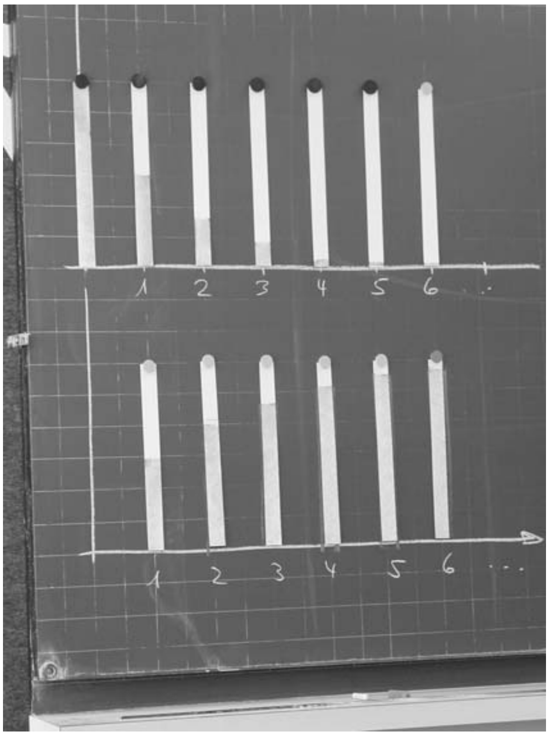
Kurz vor Schluss der Stunde trete ich nochmals im weissen Hemd als Zenon auf und verkünde: „Meine lieben Athenerinnen und Athener: Seid ihr euch bewusst, dass ihr diesen Raum niemals wieder verlassen könnt? Bevor ihr die Türe erreicht, müsst ihr nämlich in der Hälfte der Distanz zur Türe ankommen. Dort angelangt, müsst ihr zuerst die Hälfte der verbleibenden Strecke zurücklegen und von dort müsst ihr wieder erst in die Mitte des restlichen Stückes schreiten usw. Und so wird euch doch wohl allen klar, dass ihr diesen Raum nie und nimmer werdet verlassen können.“ – Stille! – Es läutet, wir räumen noch auf und ich sammle die Blätter. Damit ist eine weitere der Paradoxien von Zenon in einem günstigen Moment präsentiert. Aristoteles, dem wir überhaupt im Wesentlichen die Kenntnis der Aporie verdanken, formuliert (nach Toeplitz, S. 1f) so: „Ich vermag nicht von hier bis zur Wand zu gehen; denn dazu müsste ich zuerst die Hälfte dieser Distanz durchmessen, und dann vom Rest wieder die Hälfte, und von dem dann bleibenden Rest wieder die Hälfte, und mit diesem stets fortsetzbaren Prozess kann ich nie zu einem Ende gelangen.“

Die Stühle habe ich wieder im Halbrund angeordnet. An der Tafel hängen der Text der Geschichte, die Bilderfolge und die A3-Blätter mit den graphischen Darstellungen der Schülergruppen aus der letzten Lektion. Auf einer Tischreihe vor der Tafel stehen zehn gleiche zylinderförmige Gläser nebeneinander. Die ersten zwei voll Flüssigkeit (mit Kaliumpermanganat gefärbtes Wasser). Schon vor Stundenbeginn fragt mich Kim, wo denn bei Zenons Überlegungen der Fehler stecke. Ich vertröste sie auf die heutigen beiden Lektionen. Ein Zeichen, dass sich die Geschichte und der Konflikt beim einen oder der andern im Kopf eingenistet haben.

Zu Beginn der Stunde verweise ich nochmals auf unseren Wettlauf von Achilles mit der Schildkröte, zeige auf die vorliegenden graphischen Darstellungen der letzten Lektion und rufe den Konflikt in Erinnerung: „Zenon behauptet mit seiner Geschichte, dass Achilles die Schildkröte im Wettlauf nie einholen wird, was aber unserer Erfahrung völlig widerspricht. Heute wollen wir der Sache tiefer auf den Grund gehen und schauen, ob es uns gelingt, mehr Klarheit zu gewinnen. Vorerst gibt es zum Thema ein Experiment mit den Gläsern."

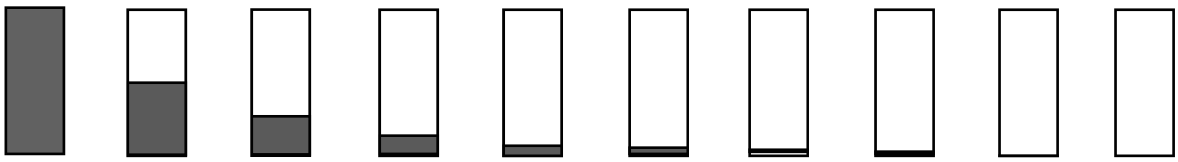
Ich stehe hinter der Gläserreihe und nehme das zweite volle Glas. Bedächtig und wortlos giesse ich die Hälfte der Flüssigkeit ins dritte Glas, die Hälfte des dritten ins vierte, usw. Bei einigen Halbierungsvorgängen muss ich hin- und herschütten, bis es stimmt. Die Schülerinnen und Schüler geben Anweisungen: „Zu viel!" – „Zu wenig!", bis wir mit den Halbierungen zufrieden sind. Betime übernimmt drei der Halbierungsvorgänge. Nach acht Halbierungen deute ich mit einer Geste an, dass dieser Vorgang jetzt beliebig weiter ginge, beliebig weiter, es gibt kein letztes Glas. Wir betrachten das Bild der abnehmenden Flüssigkeitsinhalte einen Moment und Nadine bemerkt bestätigt: „Das ist ja asymptotisch, wie wir es gezeichnet haben." Den Umschüttvorgang mache ich Glas für Glas rückgängig, bis wieder zwei gleich volle Gläser nebeneinander stehen. Achim erwähnt, dass jedes Glas gleich viel Flüssigkeit beinhaltet, wie alle folgenden Gläser zusammen. Etwas schneller wiederhole ich den Halbierungsvorgang! An der Tafel halten wir das Bild mit gefärbten Papierstreifen in gleichen Abständen fest. Jetzt nehme ich das zweite Glas und bewege es schrittweise nach rechts. Dabei giesse ich den Inhalt des nächsten Glases hinzu und stelle es vor das geleerte Glas. Es füllt sich von der Hälfte zu drei Vierteln, zu sieben Achteln, … und der Inhalt nähert sich immer mehr dem vollen Glas. Die einzelnen Stadien halten wir an der Tafel ebenfalls mit Papierstreifen fest.

Kim konzentriert sich auf die erste Darstellung und bemerkt: „Das ist ja dasselbe wie bei Achilles. Die Abstände werden immer kleiner.“ Weiter geht aber im Moment die Übertragung auf unser ursprüngliches Problem noch nicht. Deshalb bitte ich die Schülerinnen und Schüler in den verbleibenden 15 Minuten das, was wir eben gemacht haben, auf einem vorbereiteten Arbeitsblatt festzuhalten und zahlenmässig weiterzuführen. Dann sollen sie sich miteinander überlegen, was dieses Gläserbeispiel mit Achilles und der Schildkröte zu tun hat.



Die Folgen werden zügig notiert, da und dort entsteht bereits eine Verallgemeinerung. Diejenigen, die fertig sind, muss ich allerdings nochmals bitten, sich doch zu überlegen und allenfalls graphisch darzustellen, was das mit unserem ursprünglichen Problem zu tun hat. Simon beginnt zu zeichnen und zeichnet noch weit in die Pause hinein. Er ist drauf und dran, die Darstellung mit den Geraden und mit den Säulen zu vereinen. „Ein nützlicher Ansatzpunkt für die Fortsetzung“, denke ich.

Zu Beginn der zweiten Lektion von heute stellen wir unsere Zahlen zusammen:



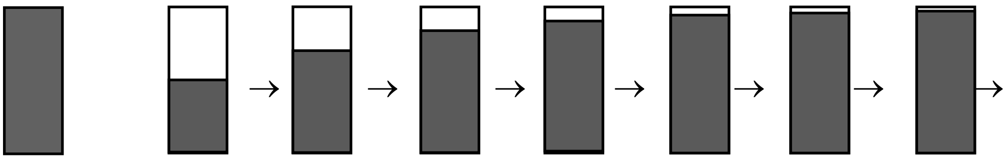
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(a_n)	1/2	1/4	1/8	1/16	1/ 32	1/64	1/128	1/256	. . .

Als allgemeine Formel für den Inhalt wird vorgeschlagen: $a_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (∗)

Die Funktion $y = (1/2)^n$, falls schon behandelt, wäre sofort sichtbar.

Manuela und Nadine haben herausgefunden $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$, das heisst, jedes Glied ist halb so gross wie das vorhergehende. Erst in der Diskussion wird ihnen klar, dass dies zur vollständigen Beschreibung der Folge noch nicht genügt, dass wir noch die Angabe eines Gliedes benötigen, also zum Beispiel $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$ und $a_1 = \frac{1}{2}$.(∗∗) Damit haben sich bereits die explizite (∗) und die rekursive (∗∗) Definition einer Folge ergeben.

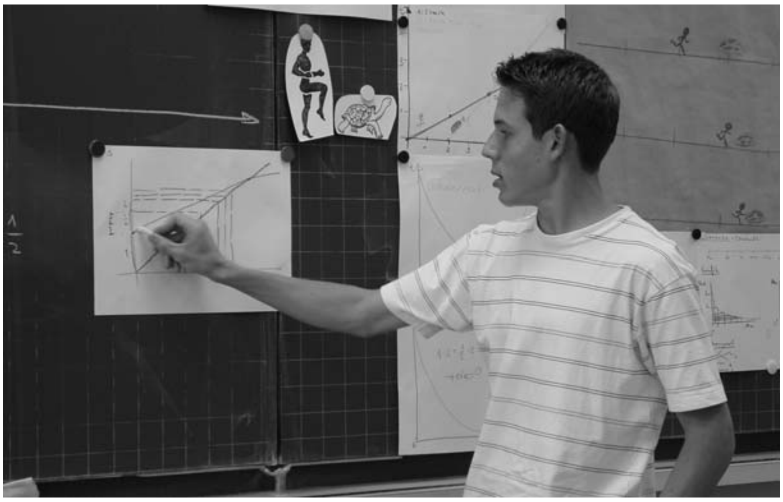
Die Flüssigkeit wird gesammelt:



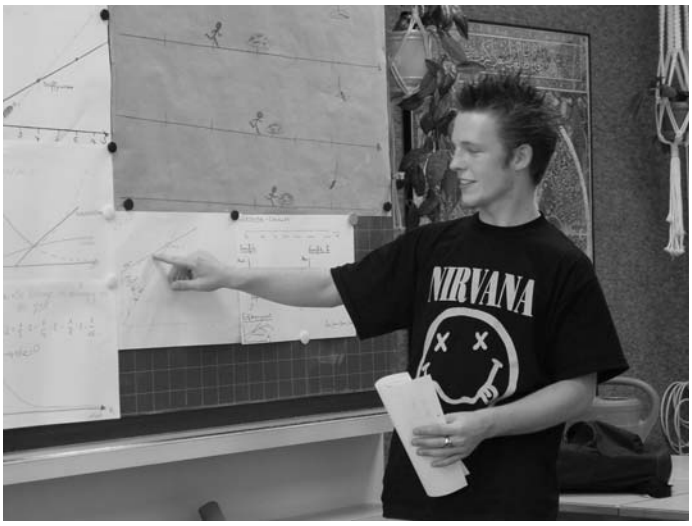
	1	2	3	4	5	6	7	
Folge (s_n)	1/2	3/4	7/8	15/16	31/ 32	63/64	127/128	. . .

Achim bringt die Formel $s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ und begründet, dass eben zum Inhalt 1 immer noch der Inhalt von $a_n = \frac{1}{2^n}$ fehlt, damit es ganz voll ist. Und es fehlt eben von Mal zu Mal weniger. Die erste Schreibweise der Formel entsteht aus der Beobachtung, dass der Zähler immer um eins kleiner ist als der Nenner.

Was hilft uns das eben Analysierte für das Achillesproblem? Die Abstände nehmen in unendlicher Folge ab, aber ein Rückstand bleibt erhalten. Ramona: „Die Kurven rechts und die Darstellung links stimmen überein. Der Graph nähert sich asymptotisch der horizontalen Achse. Achilles wird die Schildkröte nie einholen.“ Ich entgegne: „Was die fallenden Graphen anbetrifft, stimmt dies offensichtlich. Anderseits habt ihr Geraden gezeichnet, die sich schneiden und behauptet, dass Achilles die Schildkröte überholt. Wie ist dies zu vereinbaren?“ Michael: „Wir haben zwei Geraden mit verschiedenen Steigungen, aber sie dürfen sich nicht schneiden oder erst im Unendlichen, sonst würde Achilles die Schildkröte ja einholen.“ Wie viel Verzweiflung oder Verwirrung muss vorhanden sein, dass jetzt sogar das „Nichtschneiden“ von zwei Geraden mit verschiedenen Richtungen gefordert wird? Die Überzeugung, dass Achilles die Schildkröte nie und nimmer einholen wird, hat offenbar stark um sich gegriffen. Das Gläserbeispiel hat Zenon unterstützt. Ich gebe etwas Gegensteuer: „Aber auf den Blättern schneiden sich eure Geraden sehr wohl im Endlichen!“ Der Konflikt ist noch grösser als zuvor.



Ich bitte Simon, seine Zeichnung vorzustellen. Sehr unsicher wie seine Darstellung eben noch ist, erläutert er. Horizontal ist die Zeit, vertikal die Distanz vermerkt. Die Abstände werden vertikal summiert:
1 + 1/2 + 1/4 + …
„Es könnten auch am Anfang 10 Meter sein. Man sieht, dass sich der Abstand von Aufholvorgang zu Aufholvorgang halbiert. Und das geht nicht über 20 Meter.“ Gut sichtbar ist, dass dasselbe auch mit der Zeit passiert, aber bislang bemerkt dies niemand so richtig, auch Simon nicht. Aus der Klasse folgen leider keine Reaktionen auf Simons Erläuterungen. Hier hätte ich natürlich mit einer Frage die Zeit ins Zentrum rücken können. Ich entscheide mich aber dazu, bei Philippe nachzufragen. Er hat das



letzte Mal zusammen mit Marcel und Roman in seiner Darstellung die Aufholvorgänge sauber und exakt, aber noch zögerlich fein eingetragen. Leider können aber weder er noch seine Kollegen im Moment mehr dazu sagen. So rege ich an, die Aufholvorgänge an der Tafel ähnlich den Gläserdarstellungen festzuhalten. Ich zeichne das Koordinatenkreuz und beginne mit dem ersten Papierstreifen. Es folgen Jan, Michel, Roman, Kim, Dominik, Achim. Die seitlichen Abstände werden allerdings viel zu gross gehalten. Erst auf meine ausladende Geste hin und die Frage, wie weit hinaus das wohl gehe, interveniert Simon. Er kommt an die Tafel, rückt die Säulen näher zusammen, zeichnet seine zwei sich schneidenden Geraden und behauptet, die Zeiten würden eben auch immer kürzer. Für den ersten Aufholvorgang schlägt er 5 Sekunden vor, wohl gemäss den 5 Häuschen, die dafür an der Tafel eingeräumt sind, und schliesst daraus, dass der ganze Vorgang dann keine 9 Sekunden dauern würde. „Langsam kommen wir der Sache näher", so denke ich.

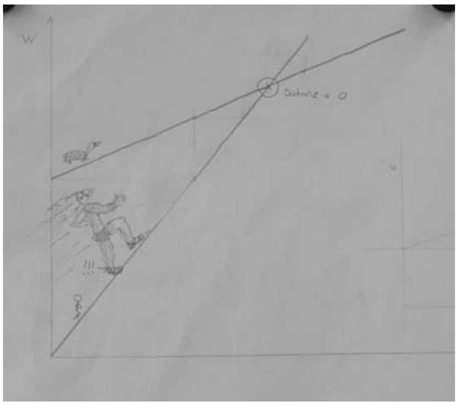
Ich übernehme Simons Angaben für eine Tabelle:

Wegstrecke	10 m	5 m	2.5 m	1.25 m	0.625 m	0.3125 m	
Zeit	5 s	2.5 s	1.25 s	0.625 s	0.3125 s	0.15625 s	

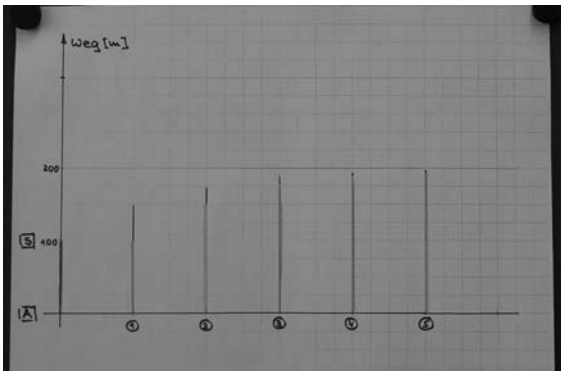
Manuela füllt die Tabelle aus, kann aber nichts dazu sagen. Michel, der in der Zwischenzeit eher unkonzentriert war, meldet sich zurück: „Das dauert nicht etwa 9 Sekunden, sondern etwas weniger als 10 Sekunden, denn 5s + 2.5s + 1.25s + 0.625s + ... , das ist ja wie mit den Gläsern!"
Meine Frage: „Und was bedeutet das jetzt?" Da keine Antwort folgt, erinnere ich mich an eine bereits erlebte Übung. Ich kündige an, dass ich Achilles langsam auf der Zeitachse bewegen werde und bitte Tanja, am Ende jedes Aufholvorgangs zu klatschen. Ganz langsam bewegt sich Achilles, ein Klatscher ist hörbar, ein zweiter folgt, wieder einer und immer dichter. Die ganze Klasse klatscht mit; sie klatschen aber immer noch, auch nachdem Achilles die Zehnsekundenmarke überschritten hat. In der Wiederholung hört das Klatschen dann wirklich abrupt auf. Achim: „Die Abstände zwischen den Klatschern werden immer kleiner." Philippe: „Da muss so oft geklatscht werden, dass dies als Dauerton wahrnehmbar ist."

Ich will es noch anders formulieren: „In diesen 10 Sekunden müssen sie alle stattfinden, diese unendlich vielen Klatscher, diese unendlich vielen Aufholvorgänge. Je näher beim Ende, desto dichter. Wir können sie im Einzelnen nicht zu Ende klatschen, aber auch nicht zu Ende denken. Mit unseren unendlich vielen Klatschern nähern wir uns beliebig nahe an die 10 Sekunden; mit den unendlich vielen Aufholvorgängen eilt Achilles beliebig nahe an die 20-Meter-Marke. Und die Schildkröte ist immer noch ein ganz klein bisschen voraus! Aber diese unendlich vielen gedachten Aufholvorgänge brauchen nur eine endliche Zeit und vollziehen sich auf einer endlichen Strecke. Offenbar können wir auf einer endlichen Strecke unendlich viele Teilstrecken durchlaufen und dies sogar in einer endlichen Zeit! Dies beruht auf der Annahme, dass wir Raum und Zeit unbegrenzt unterteilen können. Viele der heutigen Physiker sind der Ansicht, dass diese beliebige Unterteilung von Raum und Zeit gar nicht möglich ist, dass es extrem kleine Raum- und Zeiteinheiten gibt, die nicht weiter unterteilbar sind. Wenn wir unser Gläserexperiment mit der Flüssigkeit fortsetzen, so werden wir physikalisch an Grenzen stossen, spätestens bei der Halbierung von Molekülen und Atomen.“ Zum Schluss der Stunde bitte ich die Schülerinnen und Schüler, das Ganze zu Hause nochmals gut zu überdenken!

Lektion 6

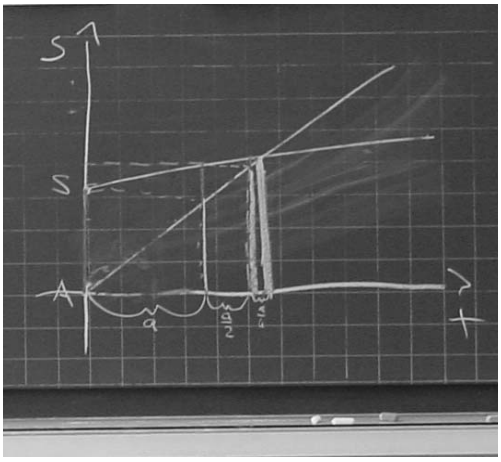


An der Tafel sind ganz links die Bilderfolgendarstellung und weit rechts eine graphische Darstellung aus der 3. Lektion aufgehängt. Neben die Bilderfolge hänge ich eine Säulendarstellung mit den Aufholvorgängen, wie wir sie das letzte Mal an der Tafel hatten. Heute möchte ich diesen Zusammenhang von links bis rechts, von der Zenongeschichte mit den Aufholvorgängen bis zur Darstellung mit zwei Geraden nochmals ins Bewusstsein rufen und dann verallgemeinern. Nach der Ankündigung dieses Inhaltes frage ich nach der zentralen Aussage der letzten Stunde. Nadine meint: „Es gibt unendlich viele Aufholvorgänge.“ Sonst kommt weiter



nichts. Ich bin enttäuscht. Hat sich die Grundidee noch nicht in den Köpfen festgesetzt? „Wie sind die Darstellungen mit den Aufholvorgängen und die nüchterne Graphik mit den sich schneidenden Geraden zu vereinbaren?“ Michel kommt an die Tafel, zeichnet eine steigende Gerade für die Schildkröte und eine gebogene Kurve für Achilles, damit er die Schildkröte nicht einholt. Simon wendet ein, dass so Achilles ja immer langsamer würde. Er zeichnet an die Tafel zwei sich schneidende Geraden und zwei Aufholvorgänge. Weiter möchte er nicht zeichnen. „Und wo erscheinen die weiteren Aufholvorgänge?“ Jan: „Man kann sie nicht zeichnen, die werden verschwindend klein.“ Ich verweise auf das aufgehängte Blatt, wo sichtbar ist, dass die blauen Wege von Achilles immer länger werden.“ Achim: „Sie überlappen sich; man müsste sie ganz dünn oder alles viel grösser zeichnen.“ Ich bitte ihn trotzdem zu zeichnen, da ich vorgesehen habe, anschliessend eine saubere Zeichnung entstehen zu lassen. Roman ergänzt noch, dass sich die Zeit ja immer wieder halbiere.

Nadine präzisiert: „Weg und Zeit verhalten sich proportional. Beide halbieren sich von Mal zu Mal.“ Achim deutet dies in der Zeichnung an mit den Termen a , a/2 , a/4 , … und zeichnet einen weiteren blauen Strich für den nächsten Aufholvorgang.



Da ich immer noch einige staunende Gesichter vor mir sehe, erachte ich es als vorteilhaft, nochmals eine Tabelle ausfüllen zu lassen:

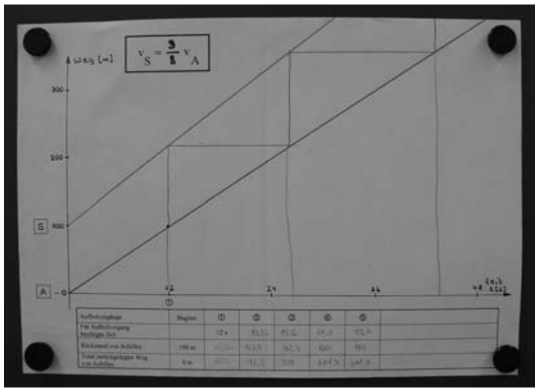
Aufholvorgänge	Beginn	①	②	③	④
Für Aufholvorgang benötigte Zeit		12 s	6 s	3 s	1.5 s
Rückstand von Achilles	100 m	50 m	25 m	12.5 m	6.25 m
Total zurückgelegter Weg von Achilles	0 m	100 m	150 m	175 m	187.5 m

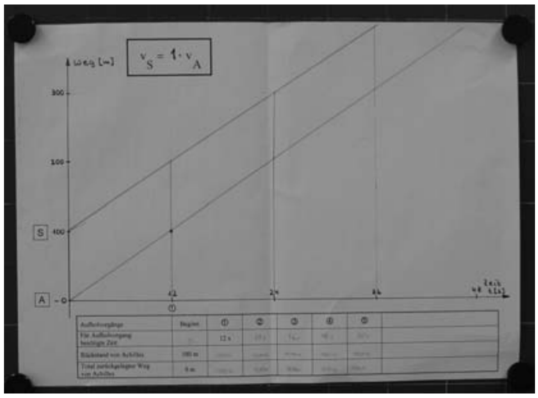
Dies geht relativ zügig. Der Rückstand von Achilles halbiert sich von Aufholvorgang zu Aufholvorgang und strebt gegen Null. Der von Achilles zurückgelegte Weg nähert sich mehr und mehr der Länge von 200 m. Nadine erinnert an das Zusammenschütten der Flüssigkeit in die Gläser. Und die Zeiten werden die 24 Sekunden nicht überschreiten. Und wie ist es, wenn wir nach jedem Aufholvorgang klatschen? Für Tanja ist es klar, dass dies alles innerhalb der 24 Sekunden passieren muss. Nachher ist Stille. Aber diese unendlich vielen Klatscher, die einander immer dichter folgen, können wir nicht alle erzeugen, genauso wie wir diese unendlich vielen Aufholvorgänge nicht zu Ende denken können. Und dies alles in der endlichen Zeit von 24 Sekunden und auf einer Strecke von 200 Metern! Ich merke, dass diese Ungeheuerlichkeit immer noch für einige Schülerinnen und Schüler unfassbar ist. Statt hier weiter zu diskutieren, verteile ich immer an zwei Schüler ein Blatt, auf dem diese Aufholvorgänge berechnet und sauber eingetragen werden sollen. Jedes Blatt beinhaltet ein anderes Verhältnis der Geschwindigkeiten von Achilles und der Schildkröte. Oben behandelt haben wir den Fall, dass die Schildkröte halb so schnell ist wie Achilles, also $v_S = 1/2 \cdot v_A$. Zu bearbeiten sind nun die Situationen mit $v_S = q \cdot v_A$ für q = 1/10 , 1/4 , 2/3 , 3/4 , 7/8 , 1 , 9/8 , 5/4. Damit hoffe ich sehr, dass sich die Klasse bis zum nächsten Mal intensiver mit dem Thema auseinandersetzt. Gleichzeitig werden wir dann einen Überblick über die Auswirkungen verschiedener Geschwindigkeitsverhältnisse erhalten und davon ausgehend die Resultate verallgemeinern können.

Lektionen 7/8

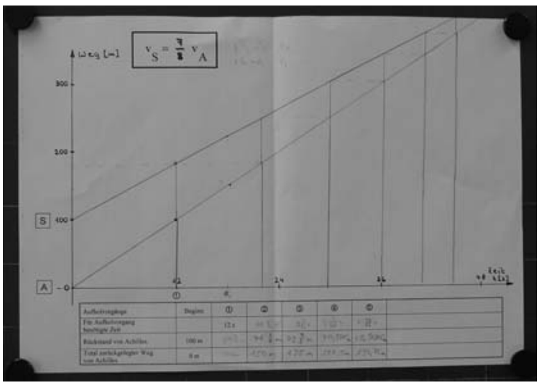
Wiederum hängen ganz links die Bilderfolge, ganz rechts die graphische Darstellung. Die Schüler sind gebeten, ihre verschiedenen Säulendarstellungen dazwischenzuhängen. Die neun Blätter folgen umgehend und wir können sie betrachten.

„Der Wettlauf von Achilles und der Schildkröte ist ja noch in vollem Gange. Was fällt auf beim Vergleichen der verschiedenen Darstellungen.“ Achim stellt fest, dass bei zwei Blättern der Vorsprung der Schildkröte immer grösser wird. Ich nehme diese beiden Darstellungen und hänge sie ganz oben hin. Marcel: „Bei den andern Darstellungen holt Achilles die Schildkröte ein.“ Michel: „Bei den einen holt er sie rasch ein, bei den andern weniger rasch, man könnte sie ordnen.“ Ich bitte ihn, zusammen mit seinem Nachbarn Dominik die Blätter zu ordnen. Leider reicht die Vertikale nicht, also müssen wir ganz unten an der Tafel auf die Horizontale ausweichen. Das letzte Blatt hat keinen Platz in der Zeile, aber Betime bemerkt: „Hier sind beide gleich schnell.“ Gut sichtbar ist auf einem Blatt der konstante Abstand. „Gibt es weitere Beobachtungen?“ Nadine fragt zurück: „Ist die Frage mathematisch oder real gemeint?“ Ich: „Ist da ein Unterschied?“ Nadine: „Ja, mathematisch holt Achilles nie ein,

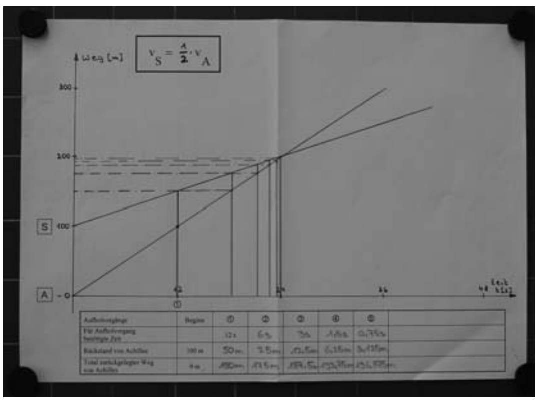




real aber schon.“ Ich: „Das ist aber eine sehr unbefriedigende Situation!“ Simon: „Wenn wir immer wieder anhalten lassen, holt Achilles nie ein.“ Ist da immer noch das „Sprung und Stopp“ im Kopf? „Und wenn wir sie nicht stoppen? Gilt dann die Aussage von Zenon nicht? Er hat doch nichts über Stoppvorgänge gesagt.“ Immer noch schwirren die verschiedensten Vorstellungen im Kopf herum. Ich hoffe, dass der zentrale Punkt mit dem Klopfen in den verschiedenen Darstel-



lungen klarer wird. Ich beginne mit den gleich schnellen Läufern. Achilles bewege ich entlang des Diagramms und die Schülerinnen und Schüler klopfen am Ende jedes Aufholvorgangs auf den Tisch. Die Klopfer erfolgen in gleichem Abstand, ein Taktschlag nach dem andern wie bei einem Uhrwerk. Dann folgt ein Beispiel, bei dem die Schildkröte dem Achilles davonläuft. Die Klopfer folgen in immer grösseren Abständen. Diese Fälle scheinen allen klar zu sein. Und jetzt das Beispiel, bei dem Achilles doppelt so schnell ist wie die Schildkröte. Die Klopfer folgen in immer kürzeren Abständen und wollen nicht aufhören.



Tanja protestiert: „Die Klopfer hören auf!“ Beim zweiten Mal klappt es nicht schlecht. Ich: „Wie viele Klopfer gibt es da?“ --- Schweigen.

Manuela: „Von einem gewissen Moment an gibt es keine mehr.“
Ich: „Ja, kennen wir diesen Moment?“
Tanja: „Nein, es sind ja unendlich viele Klopfer.“
Ich: „Und trotzdem hört ihr auf?“
Simon wird etwas ausführlicher: „Die Klopfer werden immer dichter, man klopft und klopft innerhalb dieser Zeit unendlich oft.“
Ich: „Wer von euch hat unendlich oft geklopft?“
Tanja: „Nein, das kann man natürlich nicht durchführen, die Hände machen das nicht mit.“
Nadine: „Und die Zeit ist ja begrenzt.“ Die Idee, dass da jemand die Streckenlänge und die Zeit begrenzt, haftet tief.
Ich: “Wer begrenzt denn die Zeit, etwa Zenon?“
Simon: „Wir erreichen die 24 Sekunden nie.“
Ich: „So werden wir also ewig jung bleiben?“ Schmunzeln allüberall.
Tanja: „Niemand begrenzt die Zeit, aber das Ganze findet in einer begrenzten Zeit statt.“
Nun, dieser Ausdruck „begrenzt“, hat seine Tücken, da denkt man an eine gesetzte Grenze, an eine Grenzlinie, vielleicht sogar an einen Grenzwall, an den Limes! Zenon spricht weder von einer Begrenzung der Rennstrecke noch von der Zeit. Es sind die Vorgaben selbst, nämlich der Anfangsvorsprung und die Geschwindigkeiten, welche die Länge dieser Aufholvorgänge bestimmen.

Offenbar braucht es wiederum die Tabelle für den einfachsten Fall mit $v_S = 1/2 \cdot v_A$.
Wir notieren nochmals die Zahlen.

Benötigte Zeit für die Aufholvorgänge:	12 s + 6 s + 3 s + 1.5 s + . . .	$\rightarrow$
Laufstrecke von Achilles:	100 m + 50 m + 25 m + 12.5 m + . . .	$\rightarrow$

Richtig wird bemerkt, dass die Laufstrecke für alle Aufholvorgänge zusammen sich immer mehr den 200 Metern nähert und die dafür benötigte Zeit gegen 24 Sekunden beträgt. So durchläuft Achilles also diese unendlich vielen Aufholvorgänge von Zenon innerhalb von 24 Sekunden auf einer Strecke von 200 Metern. „Und hier sind wir wieder am Kernpunkt unserer Geschichte wie am Ende der letzten Lektion: Diese unendlich vielen gedachten Aufholvorgänge finden auf einer endlichen Strecke und offenbar auch in einer endlichen Zeit statt. Denken wir uns Raum und Zeit unendlich oft teilbar, so sind innerhalb einer endlichen Strecke und einer endlichen Zeit unendlich viele Aufholvorgänge möglich. Und die Summe von unendlich vielen positiven Grössen, hier Strecken bzw. Zeiten, muss dabei nicht automatisch unendlich gross werden, was unserer Alltagsvorstellung und der physikalischen Wirklichkeit völlig widerspricht.“ Hier ist ein Paradigmenwechsel angesagt! Aber offenbar fällt es sehr schwer, sich mit diesen neuen Gedankengängen anzufreunden.

III. Akt: Vom Konkreten zum Allgemeinen

Ich greife nochmals Nadines Aussage aus der vergangenen Stunde auf, nämlich dass Achilles mathematisch gesehen nicht überholt, obwohl er in Wirklichkeit doch überholt. Mit mathematisch meint sie wohl eher die Argumentation von Zenon. „Das ist doch sehr störend. Unsere mathematischen Folgerungen sollten doch mit der Wirklichkeit übereinstimmen!“ Nadine und auch Ramona nicken lebhaft. Die alten Denkgewohnheiten sitzen tief. Nochmals braucht es ein konkretes Beispiel, um den Kern der Sache zu sehen. „Schauen wir uns dies doch an einem anderen konkreten Beispiel an.“ Ich nehme das Blatt von Betime und Tanja (siehe oben!) mit $v_S = 3/4 \cdot v_A$ auf eine neue Tafel und frage Betime als Urheberin des Blattes, wo da ein allfälliger „Treffpunkt" der beiden Läufer stattfinde. Eingezeichnet ist er nämlich nicht. Ramona schätzt bei etwa 400 m. Neben die graphische Darstellung schreibe ich die Daten der Tabelle an die Tafel:

	a_1	a_2	a_3		a_n	
Wegstücke für Achilles	100 m	75 m	56.25 m	. . .	$100\cdot(3/4)^{n-1}$	
Benötigte Zeit	12 s	9 s	6.75 s	. . .		

Gesamte Wegstrecke von Achilles: $s_1 = 100 \qquad = 100$ m
$s_2 = 100 + 75 \qquad = 175$ m
$s_3 = 100 + 75 + 56.25 \qquad = 231.25$ m

Von Achilles in den ersten n Aufholvorgängen zurückgelegter Weg: $s_n = 100 + 75 + 56.25 + \ . \ . \ . + 100\cdot(3/4)^{n-1}$

s_n lässt sich jetzt mit einem mathematischen Trick einfacher darstellen. Wir multiplizieren die erste Zeile mit dem Faktor 3/4 und subtrahieren anschliessend die neue Zeile von der ursprünglichen. Dabei fallen die meisten Glieder weg, es bleiben nur von der ersten Zeile das erste und von der zweiten Zeile das letzte Glied!

$$
\begin{aligned}
s_n &= 100 + 75 + 56.25 + \ . \ . \ . + 100\cdot(3/4)^{n-1} && \Big| \text{ Multiplizieren mit } (3/4) \\
3/4\cdot s_n &= \phantom{100 + {}} 75 + 56.25 + \ . \ . \ . + 100\cdot(3/4)^{n-1} + 100\cdot(3/4)^{n} \\
\hline
(1-3/4)\cdot s_n &= 100 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 100\cdot(3/4)^{n}
\end{aligned}
$$

Multiplizieren wir die letzte Zeile mit 4, so folgt: $\underline{s_n = 400 - 400\cdot(3/4)^n}$
Dies ist die Strecke, die Achilles in den ersten n Aufholvorgängen zusammen zurücklegt.

„Lässt sich dieses Resultat interpretieren?" Michel: „Drei Viertel hoch n wird immer kleiner." Ich reagiere zögernd. Achim: „Das strebt gegen 0." Michel: „Das habe ich auch gemeint." Tanja: „Diese Summe strebt immer mehr gegen 400." Ich notiere dies in Worten und auch symbolisch: $s_n \to 400$ für $n \to \infty$ Dies scheint offenbar einzuleuchten und klar zu sein. Deshalb bitte ich die Schüler auf dieselbe Art die Zeit zu erfassen. Nadine ist als erste damit fertig und fragt, ob das gegen 48 Sekunden strebe. Ja, das stimmt! Sie ist ganz stolz.

Jetzt sind wir bereit für die Verallgemeinerung. Den Ansatz notiere ich an der Tafel

$\boxed{v_S = q\cdot v_A} \qquad a_1 \ , \ a_1\cdot q \ , \ a_1\cdot q^2 \ . \ . \ . \ a_1\cdot q^{n-1}$

$s_n =$

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten konzentriert und einigen gelingt die Verallgemeinerung bereits während der Stunde. Wer fertig ist, bekommt den Auftrag, im Zahlenbeispiel den Schnittpunkt der beiden Geraden mit deren Gleichungen zu berechnen, wie wir es vor eineinhalb Jahren bei den linearen Funktionen gelernt haben. Diese Methode müsste doch auf Resultate führen, die mit den jetzigen Überlegungen übereinstimmen.

Die Hausaufgabe auf Montag ist dreiteilig:

- Diese Berechnungen fertig führen.
- Eine vorliegende theoretische Einführung ins Thema „Folgen und Reihen“ von 2 ½ Seite lesen. Sie beinhaltet die nötigsten Fachbegriffe und Erläuterungen anhand unserer Beispiele.
- An der Tafel hängen zehn verschiedene Herausforderungen bzw. Aufgabenstellungen. Darunter befinden sich ein paar Fraktale, das sind Figuren, bei denen Teilfiguren eine verkleinerte Kopie der Gesamtfigur sind. Diese Probleme liegen in zweifacher Ausführung vor, so dass sich jeder Schüler und jede Schülerin ein Blatt wählen kann, um sich bis zum nächsten Mal zu fragen, was diese Herausforderung mit dem behandelten Thema zu tun habe?

Bezüglich dieser letzten Aufgabe bin ich sehr gespannt: Wie reagieren die Einzelnen? Können sie eine Übertragung auf die neue Situation konstruieren? Gelingt es ihnen, entsprechende Fragen zu stellen und zu beantworten?

Lektion 9

IV. Akt: Ausweitung und weitere Vertiefung der Problematik

Blicken wir kurz zurück: Ausgangspunkt des Lehrstücks war diese herausfordernde Geschichte von Zenon. Sie hat uns in hartem Ringen zu allgemeiner Erkenntnis über Grenzprozesse bei nicht abbrechenden geometrischen Reihen geführt und sich in den dazugehörigen Formeln verdichtet. Im Folgenden bietet sich jetzt eine respektable Vielfalt von Alltagssituationen, auf die wir unsere Betrachtungsweise und die gewonnenen Erkenntnisse übertragen können. Heute möchte ich mit den Schülerinnen und Schülern ein erstes Mal durch die Aufgabenvielfalt schreiten, um zu hören, was sich die einzelnen schon gedacht haben und welche Fragenvielfalt sich eröffnet. Gleichzeitig können die verschiedenen Problemstellungen bei allen Schülern und Schülerinnen aktiv werden. Auf den drei Blättern, die ich verteile, sind alle Problembereiche notiert, wie sie am Ende der letzten Stunde an der Tafel hingen.

A) Eine alleinstehende Person möchte einer Studentin CHF 100'000.- schenken. Damit auch wirklich so viel Geld fürs Studium zur Verfügung steht, übernimmt die Person die Schenkungssteuer von 40%. Dies allerdings ist wiederum ein Geschenk . . .

Einem geschenkten Gaul schaut man ...

Wenn die Schenkungssteuer vom Schenkenden übernommen wird, muss von dieser Steuer wiederum die Schenkungssteuer berechnet werden und von dieser wiederum eine Schenkungssteuer, von dieser wiederum ...! Eine unendliche Geschichte.

Eine meiner Bekannten hat mir folgenden Fall zugetragen: Ihr Neffe hat von seinem Stiefvater (nicht blutsverwandt) eine Beteiligung an dessen Unternehmen geschenkt erhalten. Dies als Zeichen der Anerkennung für seine hervorragende Arbeit und nicht zuletzt auch in der Absicht, dass der Junior einmal das Geschäft weiterführen kann. Da der Neffe meiner Bekannten nicht über die notwendigen Mittel verfügte, um die Schenkungssteuern zu bezahlen, erklärte sich der Stiefvater bereit, diese zu übernehmen. Nach intensiven Verhandlungen mit den Steuerbehörden wurde die Schenkungssteuer auf 100'000 Franken festgelegt.

Der Beschenkte staunte in der Folge nicht schlecht, als er plötzlich eine Steuerrechnung von 150'000 Franken in Händen hielt. Im festen Glauben, es handle sich um ein Versehen, nahm er Rücksprache mit den Steuerbehörden, von denen er dann allerdings dahingehend belehrt wurde, dass es sich keineswegs um ein Versehen handle. Indem nämlich der Stiefvater die Schenkungssteuer bezahle, richte er erneut eine Schenkung aus. Und somit würden also Schenkungssteuern für die geschenkte Schenkungssteuer anfallen. Sollte diese (zweite) Schenkungssteuer wiederum vom Stiefvater bezahlt werden, würde noch eine dritte Schenkungssteuer fällig usw. usw! Um dieser unendlichen Geschichte ein Ende zu bereiten, wurde die «Übung» bei 150'000 Franken abgebrochen.

Eine Rückfrage beim Bundesgericht ergab, dass diese Praxis rechtens ist. Am 11. Dezember 1998 hat nämlich das Bundesgericht entschieden, dass eine Schuldübernahme, die ohne eine Gegenleistung erfolgt und zur Befreiung des ursprünglichen Schuldners führt, eine Schenkung darstellt.

CASH Nr. 39   1. Oktober 1999

Tanja erläutert gut die Problematik der Schenkungssteuer und stellt schon die Reihe 100'000 + 40'000 + 16'000 + ... auf, hat aber noch nicht berechnet, wohin das führt. Sie liest den kurzen Cash-Artikel vor, welcher Grundlage bietet für diese Aufgabe. Diese ist also nicht nur reine Theorie! Ich weise darauf hin, dass es noch eine andere, einfachere Berechnungsart gebe. Da niemand auf die Idee kommt, frage ich direkter: „Wie viele Prozent des geschenkten Betrags bleiben der Studentin?“ – Nach einer Weile meldet sich Simon strahlend: „60 % und dies sind ja 100'000 Franken. Daraus ergibt sich der geschenkte Betrag.“ Tanja erhält die Aufgabe, die Schenkungssumme auf beide Arten zu berechnen. Wir hoffen, dass die beiden Berechnungsarten dasselbe Resultat liefern.

B)

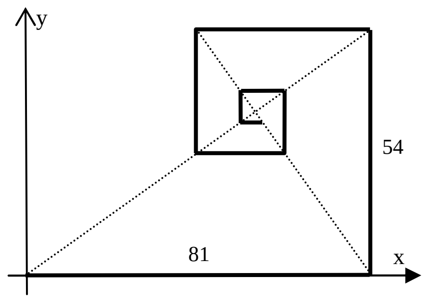
Ramona sieht zwar, wie das weiter geht, aber weiss nicht, was sie tun soll. Nadine behauptet, dass die gefärbte Fläche mehr und mehr das ganze Quadrat überziehen wird. Berechnet hat sie aber nichts. Ich wende ein, dass es ja immer mehr weisse Quadrate gibt. Und wie steht es mit der Anzahl der gefärbten Quadrate?

C) Im Kinderzimmer wird einem Würfel mit der Kantenlänge 7 dm ein zweiter Würfel so aufgesetzt, dass die Ecken der Grundfläche des zweiten Würfels die Kanten der Deckfläche des ersten Würfels im Verhältnis 4:3 teilen. Auf gleiche Weise wird dem zweiten Würfel ein dritter aufgesetzt usw. . . .

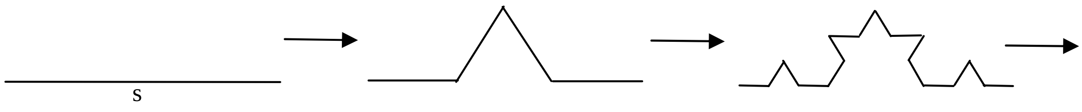
Roman liest den Text vor, versteht die Situation vorerst aber falsch. Nachdem geklärt ist, wie der zweite Würfel auf dem ersten steht, können wir uns fragen, wie die Höhe wächst mit zunehmender Anzahl der Würfel. Roman ist überzeugt, dass der Turm unendlich hoch wird. Lässt sich wohl etwas sagen über das für den Turmbau benötigte Material?

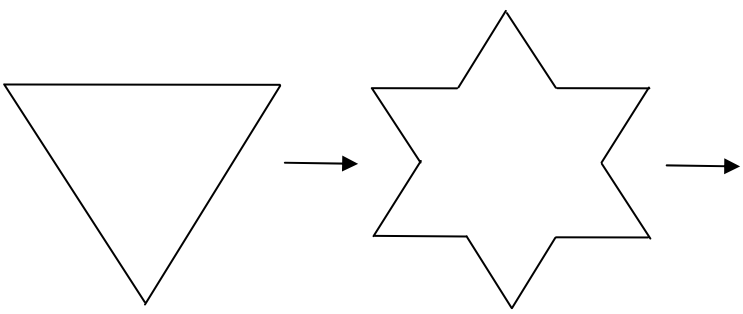
D) Eckige Spirale im Koordinatensystem.

Diese Figur hat niemand gewählt. Somit überspringen wir sie für den Augenblick.



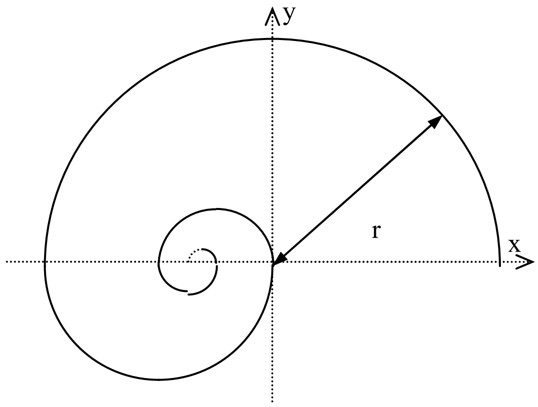
E





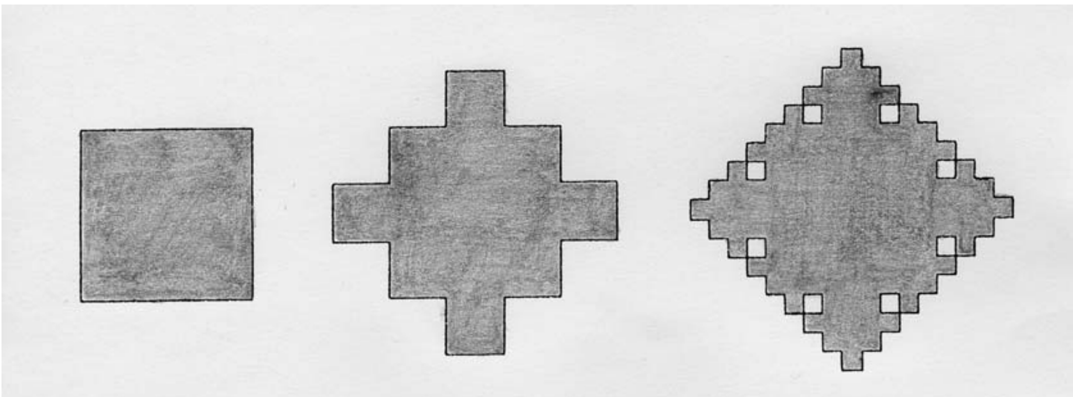
Manuela hat diese eckigen Figuren gewählt. Sie kann zwar den Fortgang des Prozesses beschreiben, hat aber keine Ahnung, was sie da allenfalls berechnen soll. Marcel sieht, dass der Streckenzug immer länger wird, aber mit welcher Gesetzmässigkeit? Lassen sich Inhalt und Umfang der unteren Figuren bestimmen. Achim behauptet, dass der Flächeninhalt zwar immer grösser, aber nicht unendlich gross wird.

F) Studiere die nebenstehende Spirale. Sie ist aus unendlich vielen Halbkreisbogen zusammengesetzt, deren Radien jeweils halbiert werden.



Simon will die Fläche aller Halbkreise bestimmen. Jason meint, man könnte die Länge der ganzen Spirale ins Augefassen. Achim vermutet, dass alle Kreisbogen vom zweiten an zusammen gleich gross sind wie der erste Kreisbogen. Ich ergänze mit der Frage, ob sich der Strudelpunkt, um den sich die Spirale immer enger zusammenzieht, bestimmbar sei.

G)

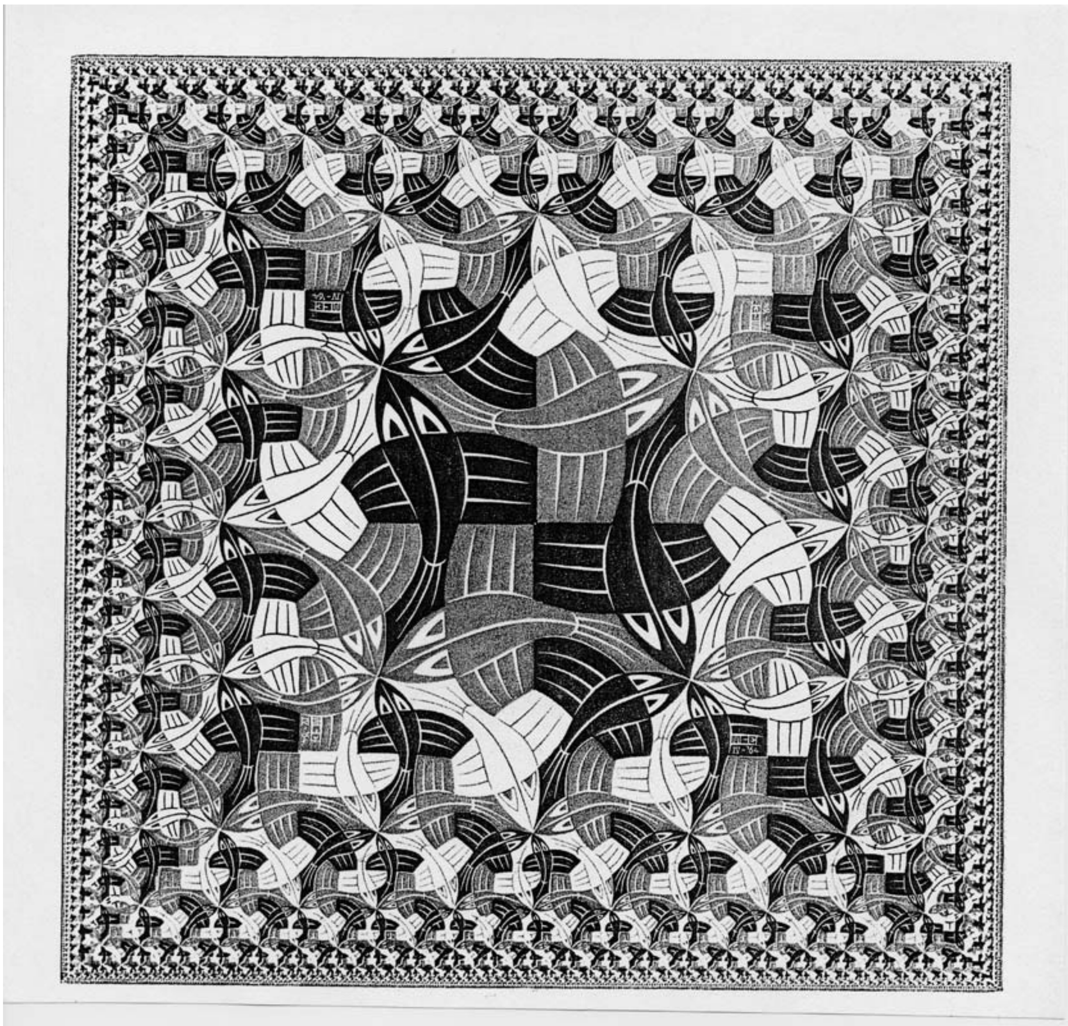


Achim erläutert an der Tafel das Prinzip dieser Figurenfolge, die Schneeflockengebilde, und ist überzeugt, dass die Fläche nicht beliebig gross wird. Und wie steht es mit dem Umfang? Zur Hilfe für die Weiterarbeit gebe ich ihm eine vorbereitete Tabelle zum Ausfüllen.

H) Tim und Tina sitzen vor einer vollen Kaffeetasse. Tim trinkt die Hälfte mit einem Schluck. Tina nimmt vom Rest die Hälfte und anschliessend Tim, . . .
Tina fühlt sich benachteiligt. Bei der zweiten Tasse nimmt Tim nur den vierten Teil und dann auch Tina nur ein Viertel des Restes, . . .

Dominik ist bei diesem Beispiel erinnert an die Gläserfolge. Die Aufteilung ist so sicher nicht gerecht, da im ersten Fall Tim mehr als die Hälfte, aber weniger als drei Viertel trinkt. Aber wie viel trinkt er wirklich? Lässt sich eine gerechte Aufteilung finden?

I) Quadratlimit, Holzschnitt von M. C. Escher, 1964



Jan schildert die Punktsymmetrie der Figur, wie sie im Zentrum gut sichtbar ist, und erwähnt die Verjüngung gegen aussen. Er meint, dies passiere etwa mit einem Faktor ¾. Dies muss genauer untersucht sein. Gleichzeitig beobachte ich Simon, der bereits mit einem Masstab intensiv dahinter geht. Er ist offenbar durch das Bild spontan angesprochen und will es ergründen.

K) Wann nach acht Uhr decken sich der grosse und der kleine Zeiger der Uhr erstmals?

Michel und Marcel können keine Parallele zur Zenongeschichte finden. Achim erläutert, wie der lange Zeiger in 40 Minuten zur Startposition des Stundenzeigers gelangt, und dieser bereits weiter ist, usw.. Jetzt ist's klar. Ich empfehle den beiden, den Weg in Winkelgrad auszudrücken und nicht in Minuten, da sonst für Zeit und Weg die gleichen Einheiten vorkommen, was zu Verwirrungen führen kann. Ich hoffe auf zwei Darstellungen und Berechnungsweisen: Mit Reihen und mit Geradengleichungen.

L) Eine Parallelgeschichte zu Zenons „Achilles und die Schildkröte“ schreiben und vortragen.

Betime hat eine Geschichte bereit. Ich werde ihr später dafür Zeit einräumen.

Somit haben jetzt alle den Überblick über die verschiedenen Lernherausforderungen und gleichzeitig neue Impulse für die eigene, gewählte „Knacknuss“. Die letzten sieben Minuten reichen gerade noch für die Besprechung der Hausaufgabe zur Schnittpunktberechnung bei Achilles und der Schildkröte für den Fall $a_1 = 100$ m und $q = ¾$.

Nur wenigen ist es gelungen, die beiden Gleichungen aufzustellen. Umso wichtiger ist es, dass Roman das Zustandekommen dieser Gleichungen erläutert.

$$\left| \begin{array}{l} w_A(t) = 100/12 \cdot t \\ w_S(t) = 75/12 \cdot t \; + \; 100 \end{array} \right| \qquad \text{(Steigung 100/12, denn Achilles legt die 100 m in 12 s zurück)}$$

Das Auflösen dieses Gleichungssystems traue ich allen zu. Es führt, wie zu erwarten aus den Reihenberechnungen, auf $t = 48$ s und $w_A(48) = w_S(48) = 400$ m, das heisst innerhalb von 48 Sekunden und 400 Metern Wegstrecke vollenden sich diese unendlich vielen gedachten Aufholvorgänge und Achilles ist mit der Schildkröte auf gleicher Höhe. Der Vergleich mit der Darstellung von Tanja und Betime zeigt, dass deren Schnittpunkt etwas zu weit rechts oben zu liegen kommt.

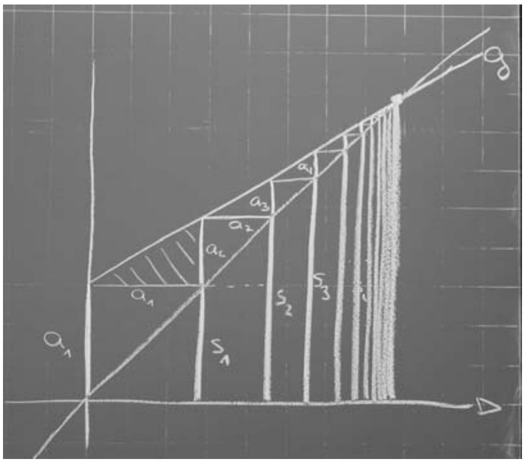
Lektionen 10/11

An der Tafel sehen wir wiederum Achilles im Wettlauf mit der Schildkröte. Heute soll die Herleitung der wichtigsten Formeln noch kurz gesichert werden, dann wollen wir die aufgeworfenen verschiedenen Probleme genauer studieren und dabei den Bezug zur Ausgangsgeschichte sehen und die entwickelten Formeln anwenden. Unter dem Wettlaufbild habe ich die Formelherleitung bereits notiert, so wie sie in der Theorie steht:

$$\begin{array}{lclllllll} s_n & = & a_1 + & a_1 \cdot q + & a_1 \cdot q^2 + & \ldots & + a_1 \cdot q^{n-2} + & a_1 \cdot q^{n-1} & \\ q \cdot s_n & = & & a_1 \cdot q + & a_1 \cdot q^2 + & \ldots & + a_1 \cdot q^{n-2} + & a_1 \cdot q^{n-1} + & a_1 \cdot q^n \\ \hline \end{array}$$

$$s_n - q \cdot s_n = a_1 - a_1 \cdot q^n \rightarrow s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} \quad \rightarrow \quad S = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Im Gespräch ergänzt Tanja richtig, dass dies nur für $q < 1$ gilt, da bei $q > 1$ der Term q^n mit wachsendem n gegen unendlich strebt und Achim ergänzt, dass bei $q = 1$ die Summe mit jedem Summanden um gleich viel wachse, also auch über alle Grenzen steige. Zur Verdeutlichung zeige ich nochmals die von den Schülerinnen und Schülern früher gezeichneten graphischen Darstellungen und ergänze, dass wir uns bislang auf positive Quotienten q konzentriert haben. Dieser Grenzübergang gilt also (vorläufig) nur für $0 < q < 1$. Zur Illustration der Zusammenhänge zeichne ich rechts davon mit Hilfe der Schüler ein gewohntes Bild, wobei ich allerdings jetzt die Ursprungsgerade als Winkelhalbierende im Koordinatensystem zeichne. Damit haben wir die Grössen a_1, a_2, a_3, … auch horizontal. Bei der Winkelhalbierenden entstehen jetzt Quadrate mit



den Seiten a_1, a_2, a_3,… und die zwischen den beiden schrägen Geraden gibt es Steigungsdreiecke mit den Steigungen a_2/a_1, a_3/a_2, a_4/a_3, usw. Da bei unseren geometrischen Folge gilt: $a_2 = qa_1$, $a_3 = qa_2$, ... , haben alle Steigungsdreiecke die Steigung q und sie sind ähnlich, wie Nadine ungefragt einwirft. Nochmals sehen wir, wie sich diese „Aufholvorgänge“ immer dichter folgen. Die Gesamtlänge der Teilsummenfolge nähert sich mehr und mehr der y-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Geraden.

Hier werde ich nächstes Mal zusätzlich mit den Geraden diese y-Koordinate berechnen lassen. Folgendes sind die Geradengleichungen.:

$$\left| \begin{array}{l} y = x \\ y = qx + a_1 \end{array} \right|$$

Aufgelöst ergibt das System $x = y = \dfrac{a_1}{1-q}$

Diesen Wert haben wir ja definiert als Summe der nicht abbrechenden Reihe!

Um diese Definition noch etwas klarer werden zu lassen, füge ich ein Beispiel ein und frage nach der Bedeutung von 9/9.
„9/9 ist eins“, tönt es unisono. „Lässt sich dieser Bruch anders darstellen?“ - Keine Ahnung!
Auf meine Frage: „Was ist denn 1/9 ?“, folgt spontan: 1/9 = 0.11111… oder $0.\bar{1}$.
„Und lässt sich dies als Reihe darstellen?“ Achim erklärt es und ich schreibe:

Ich schreibe 1/9 = 0.1111111… = $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{1000}+\dfrac{1}{10000}+\cdots$

also gilt: 9/9 = 0.9999999... = $\dfrac{9}{10}+\dfrac{9}{100}+\dfrac{9}{1000}+\dfrac{9}{10000}+\cdots$

Ich lasse jetzt die Summe der ersten n Summanden berechnen und umformen:

$$s_n = \frac{9}{10}\cdot\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n-1}{\frac{1}{10}-1} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n-1}{(-1)} = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^n \to 1 \qquad \text{oder} \qquad s = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

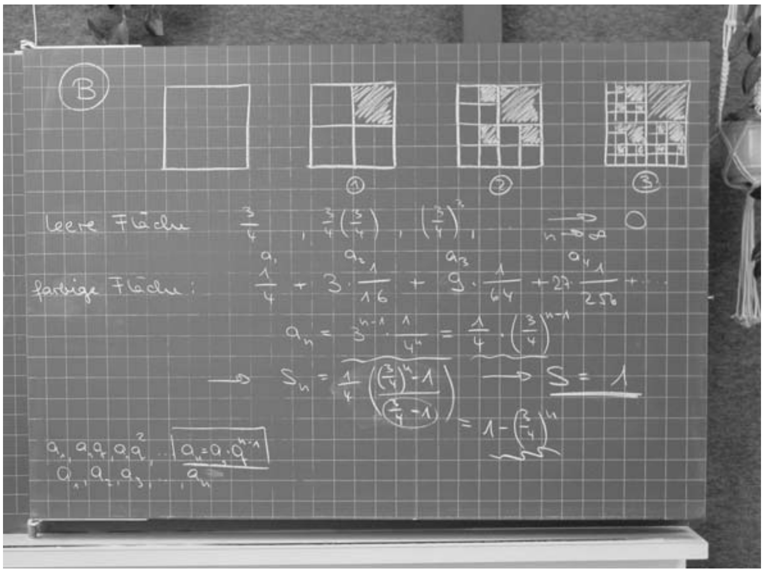
Und wiederum haben wir einen Prozess, den wir nicht zu Ende denken können. Und wenn die Mathematiker dem Grenzwert dieses unendlichen Grenzprozesses den Wert 1 zuordnen, so sind wir bei unserer ersten spontanen Antwort: „9/9 ist eins“. So sieht im Wesentlichen die Reihe aus, wenn Achilles zehnmal so schnell wie die Schildkröte läuft, dann ist $v_S = 1/10 \cdot v_A$, also q = 1/10.

Der Blick auf die Uhr zeigt, dass wir schon fast die erste Lektion gebraucht haben, um hier zusammen die von den Schülerinnen und Schülern entwickelten und im Theorietext nachgelesenen Formeln im Kontext nochmals zu vergegenwärtigen.

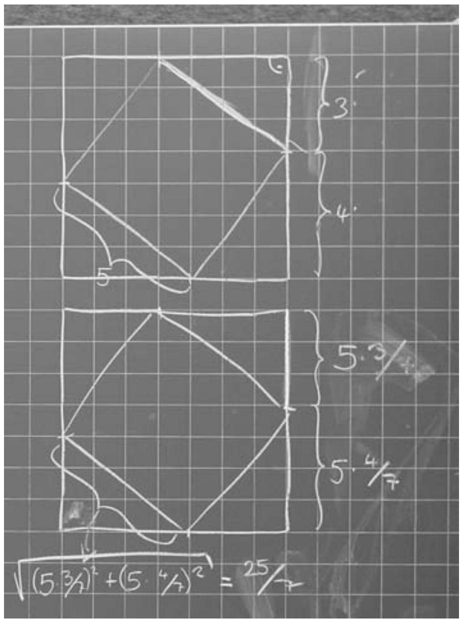
Es bleiben uns gerade noch 7 Minuten, um uns von Tanja Aufgabe A, das Steuerbeispiel, erläutern zu lassen. Eher zurückhaltend erläutert sie vor der Klasse nochmals kurz die Problematik und notiert 40'000 + 16'000 + 6'400 + … (40 % sind 2/5)

$= \dfrac{40'000}{3/5} = 66'666.66$ ohne dieses Resultat allerdings kommentieren zu können.

Erst auf Nachfrage wird formuliert, dass also die Gönnerin insgesamt 100'000.- + 66.667.-, also 166'667.- schenken muss, damit der Studentin noch 100’000.- bleiben. Die zweite Berechnungsart hat Tanja nicht ganz begriffen. Achim erläutert, dass der Studentin ja 60 % vom Schenkungsbetrag übrig bleiben und dies 100'000.- sein sollen. Jetzt ist Tanja alles klar, mit einem Dreisatzschema bewältigt sie die Berechnung gerade noch bis zur wohlverdienten Pause. Ein Blick in die Klassenrunde bestätigt mir, dass das begriffen ist. Wiederum haben wir ein Beispiel, bei dem zwei ganz unterschiedliche Denk- und Berechnungsarten auf ein und dasselbe Resultat führen.



Mit Beginn der zweiten Lektion widmen wir uns Aufgabe B. Nadine behauptet, dass die leere Fläche (es ist gefährlich von der weissen Fläche zu sprechen, weil die weisse Fläche des Arbeitsblattes an der Tafel schwarz ist) gegen null strebt, und ich wiederhole meinen Einwand, es gäbe ja immer mehr kleine leere Quadrätchen. Nadine diktiert die leeren Flächen. Ich lasse auch die farbige Fläche berechnen und es zeigt sich, dass diese wirklich gegen eins strebt. Langsam wird der Umgang mit diesen Gedankengängen und mit den Formeln vertrauter. Und trotzdem darf das Sensationelle nicht übersehen werden: Die Anzahl der leeren Quadrätchen wächst ins Unendliche: 3 , 9 , 27 , 81, . . . während die Gesamtfläche aller leeren Quadrätchen von Figur zu Figur um ein Viertel abnimmt und sich null nähert! Zur Anzahl der farbigen Quadrate kommt immer eine Dreierpotenz dazu 1 + 3 + 9 + 27 + …, sie wächst über alle Grenzen, und trotzdem übersteigt die Gesamtfläche aller farbigen Quadrate die Gesamtfläche des Quadrates nicht!



Als nächstes widmen wir uns dem Würfelturm, Aufgabe C. Roman zeichnet zwei Deckflächen, leider beide gleich gross, und notiert die ersten Seitenlängen: $a_1 = 7$, $a_2 = 5$, $a_3 = 3.57$, . . . Dass hier der Satz des Pythagoras dahinter steckt, ist klar, aber mit dem Dezimalbruch können wir nichts anfangen. Zügig notiert Roman die Berechnung und Ramona gibt den dritten Wert als Bruch 25/7 an. Jetzt wird ersichtlich, dass sich die Seiten mit dem Faktor 5/7 verkleinern. Tanja sieht und äussert klar, dass das untere Quadrat eigentlich nur Seitenlänge 5 haben sollte und die Figur zur oberen ähnlich ist, wegen der gleichen Teilungsverhältnisse. Jetzt frage ich Roman: „Hätte dieser Turm in deinem Zimmer Platz?“ – „Fragt sich, wie hoch mein Zimmer ist.“ – Simon entgegnet: „Sicher nicht, der Turm wird unendlich hoch.“ Über diese Aussage von Simon bin ich jetzt sehr erstaunt. Die Vorstellung, dass das Aneinanderreihen von unendlich vielen Strecken zu einer unendlich grossen Strecken führen muss, ist offenbar ganz tief in uns verankert, schlägt immer wieder durch, wenn wir nicht wachsam und vorsichtig sind. Meine spontane Umfrage: „Wer denkt, dass der Turm höher als 10m wird?“ endet mit dem Resultat, dass zwei bejahen, acht verneinen und die übrigen sechs unentschieden sind, sich lieber nicht festlegen. Manuela sagt: „Wir können es ja bestimmen“, und rechnet gleich vor: „70 cm + 50 cm + 35 cm + … , das macht etwa 180 cm.“ Ich wünsche ein genaueres Resultat. Philippe liefert schon bald das richtige Resultat samt Begründung:

$$\text{Höhe } h = 7 + 7\cdot(5/7) + 7\cdot(5/7)^2 + \ldots = \frac{7}{1-5/7} = 24.5 \text{ dm}$$

Simon, der vorher für einen unendlich hohen Turm plädierte: „Das ist ja wie beim Achilles, auch wenn wir den Turm nie vollenden können.“ – „Ja, wir können ihn denken, aber wir können ihn weder im Detail zu Ende denken, noch können wir ihn physisch zu Ende erschaffen!“ Es stellt sich noch die Frage nach dem benötigten Material für diesen Turm. Achim sieht da klar und diktiert:

$$V = 7^3 + (7\cdot 5/7)^3 + (7\cdot (5/7)^2)^3 + \ldots \quad \text{mit } a_1 = 7^3 \text{ und } q = (5/7)^3$$

Diese Ausrechnung und die Bearbeitung der Aufgabenbereiche E, H und K sind Aufgaben auf den kommenden Montag.

Die Bearbeitung dieser Aufgaben beansprucht viel Zeit,, aber ich bin überzeugt, dass sie nützlich ist. Erst so kann sich das neue Gedankengut langsam durchsetzen, kann sich der Paradigmenwechsel vollziehen.

Jason kommt nach der Stunde noch vorbei und wendet ein: „Aber der Turm wird doch unendlich hoch, wenn ich unendlich viele Türme aufeinander schichte!?“ Gemeinsam schauen wir uns nochmals die Graphik der letzten Stunde mit den zwei Geraden an (vgl. Seite *22*!). Hier sieht man die Würfel seitlich verschoben förmlich vor sich. Jason nickt zufrieden, bedankt sich und zieht in die Pause.

Lektion 12

Den ganzen heutigen Montag brauchen wir für die Diskussion von Aufgabe E. Manuela sieht noch nicht viel weiter als das letzte Mal, dafür bemerke ich, dass sie offenbar vom Escherbild angesprochen ist und begonnen hat, dieses zu kolorieren.
Manuela: „Der Streckenzug wird immer länger.“ Dass die Länge des Streckenzugs mit Faktor 4/3 wächst, ist bald allen klar, aber das genügt uns jetzt nicht mehr. So frage ich: „Wächst die Länge über 1000 m hinaus?“ Achim: „Die Länge wächst ins Unendliche“ und Simon ergänzt: „Da die Länge mit dem Faktor 4/3 wächst, kommt jedes Mal ein Drittel dazu, das heisst, die Länge wächst um immer mehr.“ Damit ist die Grundlage für die Figurenfolge gelegt. Es dauert eine Weile, bis die entsprechenden Folgen vor uns stehen.
Tanja vermutet, dass sich die Figur immer mehr dem Umkreis des Dreiecks annähert.

Umfang: $3s \quad 3s(3/4) \quad 3s(3/4)^2 \quad 3s(3/4)^3 \quad 3s(3/4)^4 \ \ldots \ 3s(3/4)^{n-1} \ \ldots \to \infty$

Fläche des gleichseitigen Dreiecks: $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot s^2$

Flächenzuwachs: $3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{s}{3})^2 + 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{s}{9})^2 + 48\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\frac{s}{27})^2 + \ldots$

Die Anzahl der Seiten wächst mit dem Faktor 4 und damit auch die Anzahl der neu dazukommenden Quadrätchen. Deren Seitenlänge verkleinert sich auf einen Drittel und damit die Fläche jedes neu dazukommenden gleichseitigen Dreiecks auf einen Neuntel. Zusammen ergibt dies einen Flächenzuwachs von vier Neunteln des vorherigen Zuwachses, der Quotient der Reihe ist also 4/9. Nachdem dies geklärt ist, berechnen die Schüler und Schülerinnen den gesamten Flächenzuwachs und sehen, dass dieser gegen drei Fünftel der Ursprungsfläche strebt. Insgesamt nähert sich der Flächeninhalt also immer mehr dem 1.6-fachen der Fläche des Ursprungsdreiecks, also einem endlichen Wert. Und gleichzeitig wächst der Umfang über alle Grenzen!

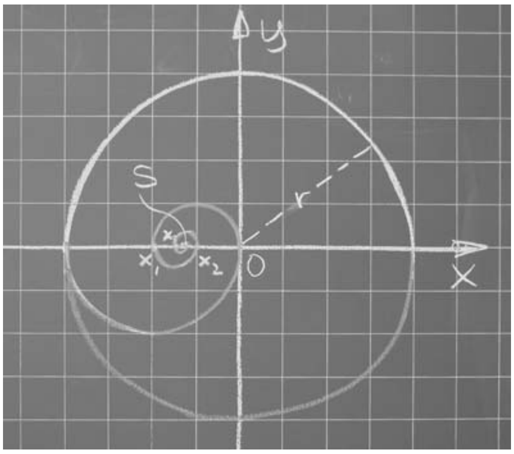
Da der Flächeninhalt gegen $1.6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (s)^2$ strebt, kann es nicht der Umkreis sein!

Berechnungen ergeben für den Umkreis mit $r = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot s$ eine Fläche von $\frac{\pi}{3} \cdot s^2$.

Die Sternfolge strebt also gegen eine Fläche, die nur knapp zwei Drittel des Umkreises der Figur ausmacht, genauer 66.16 %. Dies ist erstaunlich weniger, als man von Auge erwarten würde. *Wiederum haben wir sehr viel Zeit gebraucht, da sich die Schüler zu Hause wenig überlegt haben!* Hausaufgaben aufs nächste Mal: Einige elementare Aufgaben lösen.

Lektionen 13/14

Heute möchte ich nur wenig Gemeinsames besprechen, dafür die Schülerinnen und Schüler umso länger betreut arbeiten lassen. Vorerst konzentrieren wir uns aber gemeinsam auf Aufgabe F mit der Spirale. Dieses Beispiel ist wichtig, da wir hier erstmals eine Reihe mit negativem Quotienten treffen. Die Länge, die sich aus lauter Halbkreisen zusammensetzt, wird von Simon, dem Exponenten dieser Aufgabe, gut erklärt und leuchtet ein.



$L = \pi \cdot r + \pi \cdot r/2 + \pi \cdot r/4 + \pi \cdot r/8 +$

$= \pi \cdot r/(1-1/2) = 2\pi \cdot r$

Dies ist gerade der ganze Umfang des grossen Kreises. Alle haben schon einmal beim Geschenke Einpacken ein Band mit einer Schere gestreift, damit sich das Band nach innen einrollt wie hier, in ewiger Wiederkehr des Gleichen. Den Strudelpunkt zu finden bereitet mehr Mühe. Achim sieht, dass man auf der x-Achse immer nach links und nach rechts gehen kann und so diesem Punkt immer näher kommt. Ist die Grundidee einmal klar, so ergibt sich $x_S = -r/2 + r/4 - r/8 + r/16 - + \ldots = -r/2 / (1-(-1/2)) = -r/3$. Erstmals taucht eine geometrische Reihe mit negativem Quotienten ($q = -1/2$) auf. Für wachsende n strebt $(-1/2)^n$ gegen Null wie $(+1/2)^n$, einzig mit wechselnden Vorzeichen. Deshalb können wir die hergeleitete Formel $s = a_1/(1-q)$ auch hier verwenden. Damit haben also wir den Strudelpunkt $S(-r/3, 0)$ lokalisiert, gegen den sich die Spirale immer enger windet. Man kann sich da einen Adler vorstellen, der sich von hoch oben in sich verjüngenden Halbkreisschwüngen auf die Beute stürzt.

Als weiteres Anwendungsbeispiel der Reihen notiere ich an der Tafel: $2.\overline{73} = 2.73737373\ldots$. Jason erinnert sich noch, dass ein periodischer Dezimalbruch eine rationale Zahl ist. Diese lässt sich also als Bruch darstellen. Nur Achim (wie bei 0.111… in einer früheren Lektion) weiss, wie sich dieser Dezimalbruch als Reihe darstellen lässt. Für die andern ist dieser Zusammenhang bereits wieder in Vergessenheit geraten!

$2.\overline{73} = 2.7373\ldots = 2 + 7/10 + 3/100 + 7/1000 + 3/10000 + 7/100000 + 3/1000000 + \ldots$

Simon schlägt vor:

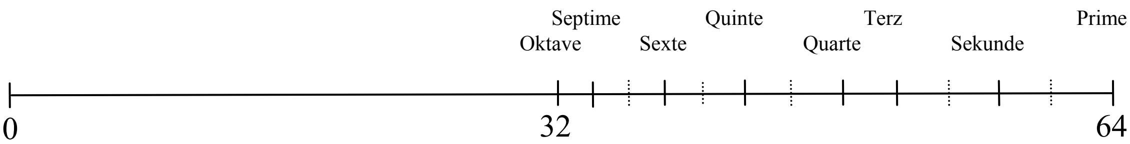
$2.\overline{73} = 2.7373\ldots = 2 + 73/100 + 73/10000 + 73/1000000 + \ldots$

und ergänzt, dass wir hier einen Quotienten von 100 hätten.

Ich lasse den Bruch berechnen, warne aber vor einem nahe liegenden Fehler. Ramona hat das Resultat als erste: 2 + (73/100)/(1-1/100) = 2 + 73/99 = 271/99. Wer die 2 als erstes Glied in die Formel eingesetzt hat, sieht den Irrtum rasch ein.

Betime möchte Aufgabe 4 besprochen haben. An Beispielen und allgemein diskutieren wir eine besondere Eigenschaft von geometrischen Folgen, nämlich dass jedes Glied (n>1) der Folge betragsmässig geometrisches Mittel der beiden Nachbarglieder ist.

Philippe, unser Gitarrenspieler, wünscht noch die Behandlung von Aufgabe 3: „Schalte zwischen 32 und 64 elf Glieder so ein, dass eine geometrische Folge entsteht! (Vergleiche mit einer Gitarre!)“ Auf meine Frage, wie lang auf seiner Gitarre die frei schwingende Saite sei, weiss er, dass diese Länge Mensur heisst. Ich ergänze: „Sie liegt meist zwischen 63 und 65 cm. Häufig ist eine Mensur von 64 cm. Dazwischen liegen elf Bünde, damit wir vom Grundton bis zur Oktave 12 Halbtonschritte bekommen. Bei dieser pythagoräischen Stimmung wird nach einfachen Zahlenverhältnissen unterteilt: 1:2 für die Oktave, 2:3 für die Quinte, 3:4 für die Quarte, 4:5 für die grosse Terz. Würden wir jetzt aber in einer weit entfernten Tonart wie E-Dur (mit 4 Kreuzen) oder in Es-Dur (mit 4 b) spielen, so hätten wir keine wohlklingenden Schwingungsverhältnisse mehr. Früher wurden Spinette und Klaviere während eines Konzerts zwischen verschiedenen Stücken umgestimmt. Um dies zu umgehen, hat man im 15. / 16. Jahrhundert die Einteilung mit einer geometrischen Folge ausgeglichen, so dass Musikstücke, gespielt auf Instrumenten mit fester Tonschritteinteilung wie Klavier, Gitarre, Flöte usw., in allen Tonarten in derselben Reinheit ertönen. Diese Stimmung nennen wir temperiert. Den Unterschied zur pythagoräischen Stimmung hört allerdings nur ein geübtes Ohr.“ An der Tafel zeichne ich die Saite mit den 64 cm Länge.



Nachdem klar ist, dass die Folge aus 13 Gliedern besteht, ergibt sich:

$$64 = 32 \cdot q^{12}, \text{ woraus folgt: } q = \sqrt[12]{2}$$

Eine Tabelle ergibt:

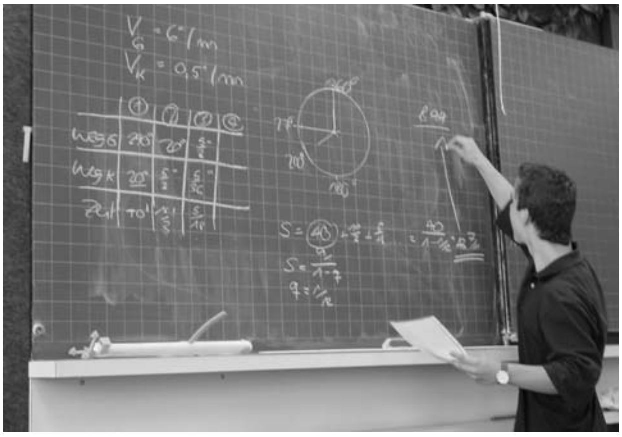
	Oktave	Septime	Sexte	Quinte	Quarte	Terz	Sekunde	Prime
pythagoräisch	1/2	8/15	3/5	2/3	3/4	4/5	8/9	1
	32	34.133	38.400	42.667	48.000	51.200	56.889	64
temperiert	0.5000	0.5297	0.5946	0.6674	0.7492	0.7937	0.8909	1.0000
	32	33.903	38.055	42.715	47.946	50.797	57.018	64

Die Berechnungen zeigen, wie wenig sich die Saitenlängen bei den beiden Stimmungen unterscheiden. Bemerkenswert ist allerdings, dass die temperierte Musik auf einem *irrationalen* Verhältnis basiert. Hier gelten die einfachen rationalen Beziehungen von Pythagoras nicht mehr! Erst das irrationale Verhältnis erlaubt diesen perfekten Ausgleich.
Der Vorgang des Halbierens der Saite kann gegen 0 hin, wie bei Achilles und der Schildkröte, beliebig fortgesetzt (gedacht!) werden. Nach jeder Halbierung ertönt eine höhere Oktave. Natürlich stossen wir auch bei diesem Beispiel bald einmal an physikalische Grenzen. Einerseits wird der Ton zu hoch, um noch gehört zu werden, anderseits ist die Saite bald zu dick im Vergleich zur Länge und schwingt nicht mehr richtig.

Nach diesem Exkurs in die Musik ist die erste Lektion bereits wieder vorbei. Die zweite Lektion ist ganz für das individuelle Arbeiten an den Beispielen da. Für den kommenden Montag, an dem wir ausnahmsweise drei Lektionen zur Verfügung haben, kündige ich den Abschluss des Lehrstücks an. Als Hausaufgabe bitte ich, Zenon einen Brief zu schreiben als Reaktion auf seine provokative Geschichte von Achilles und der Schildkröte. An Jan und Jonas, die sich beide mit dem Bild von Escher befassen, verteile ich einen Textabschnitt über das Unendliche bei M. C. Escher. Dieser wird am kommenden Montag im Finale Thema sein.

Lektionen 15/16/17

Heute haben wir drei Lektionen vor uns. Am kommenden Mittwoch wird dann noch eine Probe über das Thema stattfinden. Ich stelle kurz den von mir vorgesehenen Ablauf der heutigen Lektionen vor: Vorerst werden wir einige der Parallelsituationen ansehen, dann im Finale den Überblick über das Lehrstück schaffen, die Briefe an Zenon ins Zentrum rücken, uns für eine Rückmeldung nochmals auf das Lehrstück besinnen und schliesslich individuell Fragen klären, die bezüglich der bevorstehenden Probe noch relevant sein könnten. Die Klasse erklärt sich mit diesem Programm einverstanden. Als erstes erläutert Marcel an der Tafel und am Wecker eindrücklich die verschiedenen Aufholvorgänge. Experimentell an der Uhr hat er für das Übereinanderliegen der beiden Zeiger nach 8 Uhr die Zeit 8 h 44’ gefunden. Der Minutenzeiger bewegt sich mit 360°/h, also 6°/min. und der Stundenzeiger mit 30°/h, also 0.5°/min. Also ist dieser ein Zwölftel so schnell wie der Minutenzeiger. Während der Minutenzeiger in 40 Minuten 240° bis zur VIII zurücklegt, bewegt sich der Stundenzeiger 20° weiter. Bewegt sich der Stundenzeiger 20°, so avanciert der Minutenzeiger um 20°/12, also 5/3°, usw. Seine Tabelle verdeutlicht den Vorgang, die Schülerinnen und Schüler nicken.

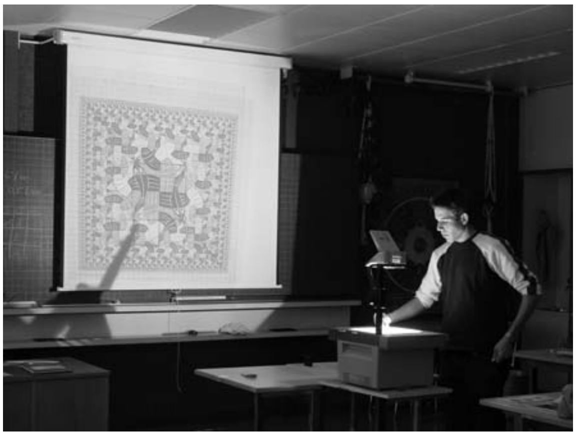


Aufholvorgang	①	②	③	④
Weg_M	240°	20°	5/3°	
Weg_S	20°	5/3°	5/36°	
Zeit	40’	10/3’	5/18’	

Daraus ergibt sich für die Zeit $T = 40 + 10/3 + 5/18 + \ . \ . \ .$ mit $q = 1/12$, da $v_S = v_M/12$. Marcel liefert ein sehr gutes Resultat für diese Summe. Er hat etwa 8 Glieder mit dem Taschenrechner zusammengezählt und dann gesehen, dass der Zuwachs nur noch minimal ist. Mit unserer hergeleiteten Formel erhalten wir exakt T = 40/(1-1/12) = 480/11’ = 43’ 38’’. Von einem andern Lösungsweg mit Geradengleichungen, wie wir sie vor bald zwei Jahren bewältigt haben, wollen weder Marcel noch die Klasse jetzt etwas wissen. Es ist erstaunlich für mich, dass der Lösungsweg mit der nicht abbrechenden Reihe mehr Gefallen findet.

Als nächstes wenden wir uns dem Escherbild zu. Jan macht auf die vier Fische im Zentrum aufmerksam und ergänzt, dass nach aussen alles mit einem bestimmten Faktor kleiner wird. Mehr kann er nicht sagen, trotz des Textes, den ich ihm und Jonas letztes Mal gegeben habe. Simon, der sich schon seit einiger Zeit mit dieser Figur beschäftigt hat, übernimmt das

Szepter. Am Hellraumprojektor zeigt er, wie sich die Quadrate nach aussen immer mit dem Faktor 0.5 verjüngen, wie bei Achilles, der doppelt so schnell ist wie die Schildkröte, nur ist das Ganze jetzt zweidimensional sichtbar. Nach aussen nähert es sich asymptotisch einer klar bestimmten Grenze, das Bild verfeinert sich in unendlichem Prozess, bleibt aber eingebunden in einem endlichen Quadrat. Und immer wieder finden wir dieselben Figurenkonstellationen. Wiederum zeigt sich die Unendlichkeit in der ewigen Wiederkehr des Gleichen.



Die Klasse kommt zusammen und ich zeige aus einem Buch (Ernst 2002, S. 102ff) einige weitere Bilder, die mit dem Unendlichen verbunden sind. Bilder mit Prozessen, die von aussen nach innen verlaufen, spiralförmige Prozesse, nichteuklidisch aufgebaute Bilder.

Jetzt kommt Betime mit der Parallelgeschichte: Wir essen einen Kuchen, nehmen aber immer nur die Hälfte und dann vom Rest wieder die Hälfte, usw. Ich provoziere und spreche von paradiesischen Zuständen. Betime relativiert, wir hätten bald nur noch kleinste Krümel, bald nur noch Moleküle oder Atome, die wir sogar noch spalten müssten. Ich nutze die Gelegenheit, um nochmals auf die physikalischen Grenzen unserer Modelle aufmerksam zu machen. Dass wir Atome nicht beliebig halbieren können, daran haben wir uns gewöhnt, dass aber Strecken und die Zeit nicht beliebig teilbar sein sollen, das ist uns doch eher fremd, auch wenn viele Physiker dies heute postulieren. Die Mathematiker entwickeln ihr Fachgebiet, als wären Raum und Zeit beliebig teilbar. Die Physiker rechnen mit diesen Grundlagen und erhalten – o Wunder! – Resultate, die exakt der Natur entsprechen. Dies ist doch seltsam und bemerkenswert. Ein Moment des Wunderns ist angesagt!

Zenon hat verschiedenste paradoxe Geschichten erzählt und so bringe ich als Zenon noch eine dritte in die Runde: „Meine lieben Athenerinnen und Athener! Seid ihr euch bewusst, dass wir uns nicht bewegen können? Bewegung ist Illusion! Wie sollte ich mich von A nach B bewegen? Bevor ich in B ankommen könnte, müsste ich mich zur Mitte von A und B bewegen. Bevor ich aber dorthin gelangte, müsste ich die Hälfte der Distanz zwischen A und dieser Mitte zurücklegen. Um dies zu tun, müsste ich wiederum erst die Hälfte davon zurücklegen und so weiter. Zu welchem Punkte sollte ich mich denn als erstes bewegen? So ist uns doch allen klar, dass es Bewegung überhaupt nicht geben kann! Bewegung ist reine Illusion!“ Während ich erzähle, merke ich, wie sich die Gesichter bald verändern. Ein „Aha!“, eine Erhellung ist zu erkennen als Zeichen, dass die Argumentation verstanden wird.

Michel und Philippe möchten noch eine weitere Geschichte hören. So erläutere ich, jetzt nicht mehr als Zenon, die vierte der bekannten Bewegungs-Paradoxien (Falletta 1988, S. 205ff), die bekannte Paradoxie vom fliegenden Pfeil. Der Pfeil kann in jedem beliebigen Moment beobachtet werden: keine Bewegung ist zu erkennen! Dies ist in jedem Moment wahr. Also kann ein Pfeil niemals in Bewegung sein. Kann überhaupt eine kontinuierliche Veränderung durch eine Reihe von Zuständen zustande kommen? (vgl. dazu Bertrand Russell 2000, S. 811f)

Nach einem Moment des Nachdenkens kann ich es nicht verkneifen, die Lektion mit dem zu den Bewegungsparadoxien gehörenden Kalauer zu beenden: „Es heisst, ein Schüler des

Zenon hätte die ewigen Beweisführungen gegen die Bewegung nicht mehr ausgehalten und sei deshalb dauernd während der Reden des Zenon auf und ab gegangen, bis Zenon schliesslich verärgert gerufen habe: ‚Kannst du nicht endlich einen Augenblick stillstehen?' Worauf der Schüler ruhig erwidert habe: ‚Willst du damit sagen, dass ich mich bewege?'"

Finale

Zu Beginn der zweiten Lektion wende ich die Tafel. Verschiedenste Darstellungen aus den letzten 16 Lektionen sind chronologisch aufgehängt. Gemeinsam gehen wir den Prozess durch: Von der Geschichte, ihrer nonverbalen Darstellung, dem inneren Konflikt zwischen Erfahrung und Verstand zu den graphischen und rechnerischen Bearbeitungsversuchen, den resultierenden Formeln und der Ausweitung in verschiedenste Problemsituationen, die wir intensiv bearbeitet haben. Ganz rechts habe ich ein gelbes Couvert als Briefkasten für Zenon aufgehängt.

Und wie lauten die Briefe an Zenon? Ich bin gespannt. Der Reihe nach rufe ich Raffael, Ramona, Michael und Nadine auf. Die Schüler wollen noch weitere Briefe hören und schliesslich werden alle vorgelesen. Ich bin positiv überrascht, dass alle einen Brief mitgebracht haben, ohne Ausnahme! Zwar zieht sich das Lesen in die Länge, dafür bietet sich da und dort die Möglichkeit einer zusätzlichen Bemerkung, einer Vertiefung, einer gemässigten Korrektur. Es folgen hier ein paar Beispiele von Briefen:

Lieber Zenon
Das Achillesproblem ist sehr komplex und ich hatte sehr lange, bis ich begriff, was du meinst. Doch selbst du musst zugeben, dass wenn man die Zeit laufen lassen würde und in der Realität nachspielen würde, deine Theorie nicht erfüllt wäre.
Das Problem, das du uns aufgabst ist, dass man eine endliche Strecke in unendliche Abschnitte unterteilen kann. So ist es möglich, dass man nie mehr zur Klassentür hinkommt.
Ich habe mich gefreut, wieder einmal einen Denktriathlon zu vollführen.
Alles Gute
Michael

Hier war Gelegenheit, nochmals auf die heikle Bedeutung des Wörtleins „nie“ aufmerksam zu machen. In gewissem Sinne eine Präzisierung steckt im folgenden Brief:

Lieber Zenon
Wie sicher schon viele haben wir uns mit deinem Rätsel befasst, und habe es nach einigem Studieren auch knacken können.
Läuft A. an den Startpunkt von S., hat S. in dieser Zeit eine gewisse Strecke zurückgelegt. … Wir kennen das Weitere.
Da S. ja immer wieder Zeit zur Verfügung steht, kann sie auch ein kleines Stück zurücklegen. Dies funktioniert, solange du bei den Aufholvorgängen bleibst. Es gibt also unendlich viele Aufholvorgänge in einer gewissen Zeit. In dieser Zeit kann A. S. nicht überholen.
Erstaunlich ist der tägliche Gebrauch. Laufen wir zur Tür hinaus, machen wir unendlich viele Abstandsverkleinerungen, kommen aber doch zur Tür hinaus. Wir sind also Meister der Unendlichkeit.
Achim

Ein gewaltiger Schlusssatz!

Zenon
Wir haben im Unterricht deine Aporie: „Achilles und die Schildkröte“ bearbeitet und studiert. Leider, muss ich sagen, dass obwohl wir über die Aporie stundenlang diskutiert haben und uns den Kopf darüber zerbrachen, glaube ich, dass sie für viele Schüler, mich einbezogen, immer noch sehr verwirrend und unglaublich ist. Es ist jedoch erstaunlich, wie du darauf gekommen bist, denn es braucht viele Überlegungen, um es dann noch auszuformulieren und zu beweisen. Ich glaube einfach, dass es in der Zeit, in der ich lebe, nicht möglich ist, dass solche Theorien in der Gesellschaft Anerkennung und Akzeptanz erhalten, denn heute hinterfragt man alles und stellt Vergleiche an mit der Realität und da kann es nicht sein, dass eine Schildkröte schneller als ein Mensch ist.
Ich kann es nun akzeptieren, jedoch verstehen werde ich es nie ganz, denn für mich gibt es immer noch zu viele Widersprüche und offene Fragen.
Betime

Das eingehende Hinterfragen und Vergleichen mit der Realität hat offenbar bei Betime keine Klärung gebracht. Auf meine Nachfrage hin konnte Betime leider keine der offenen Fragen oder der Widersprüche formulieren.

Zenon, Philosoph zu Troja
Als wir, eine Gruppe wissbegieriger Gymnasiasten, dem von euch beschriebenen Problem – das Rennen zwischen Achilles und der Schildkröte – erstmals begegneten, war die Skepsis gross. Ihr hattet eine Geschichte konzipiert, in der (nach einigen Erläuterungen unseres

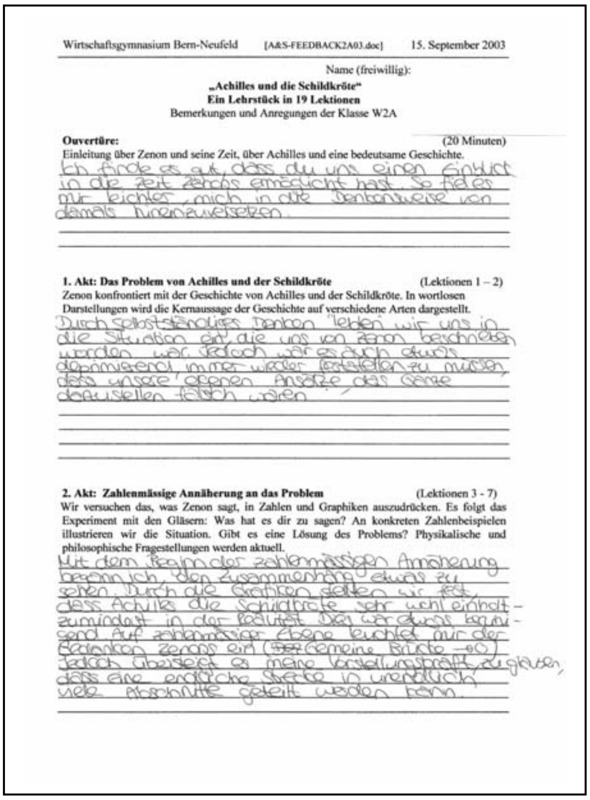
Mentors …) schlüssig und nachvollziehbar ein Paradoxon plausibel gemacht wurde: In einer endlichen Zeitspanne sollen eine unendliche Anzahl Vorgänge stattfinden. Dass sich die Geister an dieser unermesslichen Vorstellung schieden, mag ja ganz in eurem Sinne liegen – indes brachten wir auch konkrete Resultate zustande. Ausgehend von eurer Erzählung erweiterte sich der Begriff der „Unendlichkeit" für jeden einzelnen von uns im Laufe der Diskussion. Oder besser: Er wurde fassbarer. Mit dem Begriff des „Grenzwertes" verlor diese abstrakte „Unendlichkeit" ihr doch eher diffuses Erscheinungsbild, auf einmal wurde sie zumindest ansatzweise greifbar und ermesslich. Ob ihr die Geschichte über den Wettlauf nun als philosophisches Gedankenspiel oder als mathematisches Modell gedachtet – der denkerische Ansatz ist enorm.
Freundliche Grüsse
Philippe Lionnet

Eine breite Palette von Briefen hat gezeigt, wie unterschiedlich die Verarbeitungs- und Erkenntniswege verlaufen. Während für die einen der Widerspruch verschwunden ist, sind andere nach wie vor ein wenig verwirrt.

Zum Abschluss der Stunde lese ich den Abschnitt von Toeplitz vor (vgl. Kasten zu Beginn dieses Kapitels, S. 177).

4.4 Feedback der Schüler zum Lehrstück

Am Anfang der dritten Stunde füllen die Schülerinnen und Schüler meinen Feedback-Fragebogen aus. Unten abgebildet ist derjenige von Nadine (6). Anschliessend bleibt noch Zeit, individuell an einzelnen Aufgaben zu arbeiten, denn am kommenden Mittwoch wird eine Probe über dieses Thema stattfinden.



Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [A&S-FEEDBACK2A03.doc] 15. September 2003

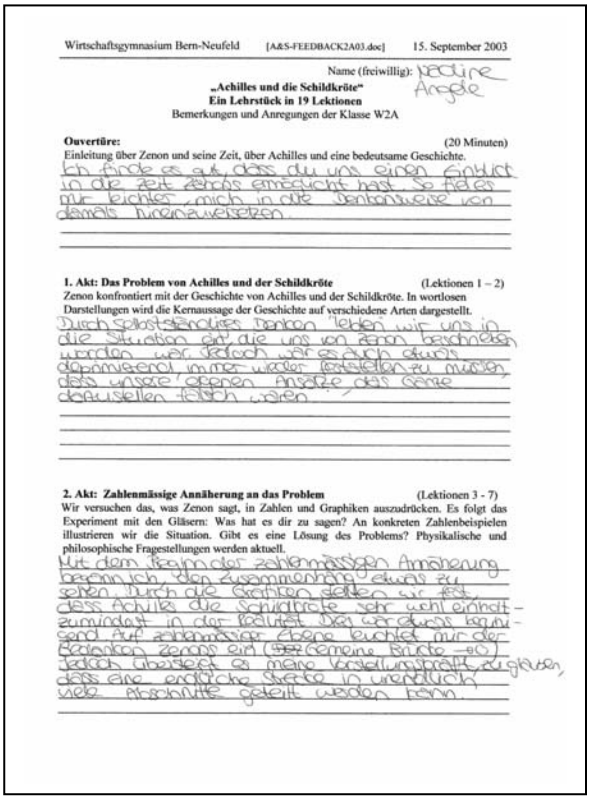
Name (freiwillig):

„Achilles und die Schildkröte"
Ein Lehrstück in 19 Lektionen
Bemerkungen und Anregungen der Klasse W2A

Ouvertüre: (20 Minuten)
Einleitung über Zenon und seine Zeit, über Achilles und eine bedeutsame Geschichte.
Ich finde es gut, dass du uns einen Einblick in die Zeit Zenons ermöglicht hast. So fiel es mir leichter, mich in die Denkensweise von damals hineinzuversetzen.

1. Akt: Das Problem von Achilles und der Schildkröte (Lektionen 1 – 2)
Zenon konfrontiert mit der Geschichte von Achilles und der Schildkröte. In wortlosen Darstellungen wird die Kernaussage der Geschichte auf verschiedene Arten dargestellt.
Durch selbstständiges Denken 'lebten' wir uns in die Situation ein, die uns von Zenon beschrieben worden war. Jedoch war es auch etwas deprimierend, immer wieder feststellen zu müssen, dass unsere 'offenen' Ansätze, das Ganze darzustellen, falsch waren.

2. Akt: Zahlenmässige Annäherung an das Problem (Lektionen 3 - 7)
Wir versuchen das, was Zenon sagt, in Zahlen und Graphiken auszudrücken. Es folgt das Experiment mit den Gläsern: Was hat es dir zu sagen? An konkreten Zahlenbeispielen illustrieren wir die Situation. Gibt es eine Lösung des Problems? Physikalische und philosophische Fragestellungen werden aktuell.
Mit dem Beginn der zahlenmässigen Annäherung begann ich, den Zusammenhang etwas zu sehen. Durch die Grafiken stellten wir fest, dass Achilles die Schildkröte sehr wohl einholt – zumindest in der Realität. Dies war etwas beruhigend. Auf zahlenmässiger Ebene leuchtet mir der Gedanken Zenons ein (~~Ser~~ Gemeine Brüche → 0). Jedoch übersteigt es meine Vorstellungskraft, zu glauben, dass eine endliche Strecke in unendlich viele Abschnitte geteilt werden kann.



Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [A&S-FEEDBACK2A03.doc] 15. September 2003

Name (freiwillig): Nadine Angele

„Achilles und die Schildkröte"
Ein Lehrstück in 19 Lektionen
Bemerkungen und Anregungen der Klasse W2A

Ouvertüre: (20 Minuten)
Einleitung über Zenon und seine Zeit, über Achilles und eine bedeutsame Geschichte.
Ich finde es gut, dass du uns einen Einblick in die Zeit Zenons ermöglicht hast. So fiel es mir leichter, mich in die Denkensweise von damals hineinzuversetzen.

1. Akt: Das Problem von Achilles und der Schildkröte (Lektionen 1 – 2)
Zenon konfrontiert mit der Geschichte von Achilles und der Schildkröte. In wortlosen Darstellungen wird die Kernaussage der Geschichte auf verschiedene Arten dargestellt.
Durch selbstständiges Denken 'lebten' wir uns in die Situation ein, die uns von Zenon beschrieben worden war. Jedoch war es auch etwas deprimierend, immer wieder feststellen zu müssen, dass unsere 'offenen' Ansätze, das Ganze darzustellen, falsch waren.

2. Akt: Zahlenmässige Annäherung an das Problem (Lektionen 3 - 7)
Wir versuchen das, was Zenon sagt, in Zahlen und Graphiken auszudrücken. Es folgt das Experiment mit den Gläsern: Was hat es dir zu sagen? An konkreten Zahlenbeispielen illustrieren wir die Situation. Gibt es eine Lösung des Problems? Physikalische und philosophische Fragestellungen werden aktuell.
Mit dem Beginn der zahlenmässigen Annäherung begann ich, den Zusammenhang etwas zu sehen. Durch die Grafiken stellten wir fest, dass Achilles die Schildkröte sehr wohl einholt – zumindest in der Realität. Dies war etwas beruhigend. Auf zahlenmässiger Ebene leuchtet mir der Gedanken Zenons ein (~~Ser~~ Gemeine Brüche → 0). Jedoch übersteigt es meine Vorstellungskraft, zu glauben, dass eine endliche Strecke in unendlich viele Abschnitte geteilt werden kann.

Feedbacktabelle zum Lehrstück: „Achilles und die Schildkröte“

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W2A vom 15. September 2003

	Ouvertüre: Einleitung über Zenon und seine Zeit, über Achilles und eine bedeutsame Geschichte.	**I. Akt: Das Problem von Achilles und der Schildkröte** Zenon konfrontiert mit der Geschichte von Achilles und der Schildkröte. In wortlosen Darstellungen wird die Kernaussage der Geschichte auf verschiedene Arten dargestellt.	**II. Akt: Zahlenmässige Annäherung an das Problem** Wir versuchen das, was Zenon sagt, in Zahlen und Graphiken auszudrücken. Es folgt das Experiment mit den Gläsern. Was hat es dir zu sagen? An konkreten Zahlenbeispielen illustrieren wir die Situation. Gibt es eine Lösung des Problems? Physikalische und philosophische Fragestellungen werden aktuell.	**III. Akt: Vom Konkreten zum Allgemeinen** Durch Verallgemeinerung erhalten wir die Formeln für die abbrechenden und für die nicht abbrechenden geometrischen Reihen. Theorieblätter stellen das Entwickelte in einen theoretischen Rahmen.	**IV. Akt: Ausweitung und Vertiefung der Problematik** Die „Zenonsche Problematik und Betrachtungsweise“ lässt sich vielfältig übertragen. Wir schauen uns Bilder von M. C. Escher an und vergleichen Parallelsituationen miteinander. Verschiedene Ansätze liefern dieselben Resultate.	**Finale:** Wir betrachten nochmals die Geschichte, verfolgen den Lauf unserer Darstellungen, Gedanken und Argumente. Zur individuellen Standortbestimmung und da wir Zenon nicht persönlich antworten können, schreiben wir ihm Briefe.	**Ergänzende Bemerkungen und Anregungen** Was denkst du über diese Unterrichtseinheit? Was war für dich besonders eindrücklich, besonders lehrreich? Wo siehst du Verbesserungsmöglichkeiten?
Jason (1)	Ich finde es sehr gut, dass Sie sich die Zeit genommen haben, eine Einleitung gemacht haben. So habe ich mich besser ins Thema einfühlen können.	Das Darstellen hat mir teilweise Mühe bereitet, doch ich war froh, dass wir genügend Zeit zur Verfügung hatten. Ich bin in der Mathematik oft sehr begriffsstutzig und durch das Verstehen von anderen Lösungen habe ich verschiedene Perspektiven anschauen können und mir davon ein Bild gestalten.	Das Experiment mit den Gläsern war beruhigend, weil ich merkte, dass auch Sie nicht der Überzeugung waren, dass das Achillesbeispiel praktisch physikalisch „logisch“ machbar ist. Dass es durch Zahlen durchaus mathematisch möglich ist, eine Annäherung zu gestalten.	Die Theorieblätter waren hilfreich, da alles endlich einmal klar dargelegt wurde. Für mich war es dennoch immer noch nicht ganz einleuchtend. Ich brauchte einige Zeit diese Formeln und Zahlen zu begreifen. Von Zeit zu Zeit ist mir äussert schwer gefallen, Ihren mathematischen Schritten an der Wandtafel zu folgen. Für mich ging dies alles ein wenig zu schnell. Auch jetzt komme ich auf den Theorieblättern nicht überall mit allen Begriffen ins Reine.	Die verschiedenen Beispiele schafften wiederum Klarheit und zeigten, wie die wilde Zenontheorie sonst noch angewendet werden konnte. Die Mathematik mit solchen Beispielen zu vergleichen, war gut. Ich gewann ein bisschen mehr Vertrauen in Zahlen. Eschers Bilder sind verwirrend. Sie haben von mir aus gesehen wenig mit Kunst, aber vielmehr mit Mathematik zu tun. Ich fand dieses Wirrwarr von immer kleiner werdenden Figuren irritierend und wäre selbst nie auf die Lösung seines Problems gestossen.		Ich fand es äusserst gut, dass wir generell genügend Zeit hatten, uns mit dem Gesagten im Unterricht auseinanderzusetzen. Es war hilfreich, dass so viele praktische Beispiele besprochen wurden. Ich weiss, dass mir Themen einfacher logisch werden, wenn ich mitdenken und mitdiskutieren kann. Visuelle Beispiele regen zum Denken an. Da wir nicht allzu schnell vorankamen, hoffe ich, dass die Probe dem Unterricht ähnlich sein wird, und nicht nur zahlen- und formellastig fordern wird.
Roman (2)	Es war knapp, aber spannend.	Anfangs hat mich die Geschichte ziemlich genervt, weil ich die Suche nach einer Lösung des Problems als ausweglos betrachtete. Mittlerweile übt die Geschichte sogar eine gewisse Faszination auf mich aus.		Hilfreich. Von nun an konnten wir die Theorie auch an einfachen Problemen anwenden.	Gute Vorgehensweise, dass jeder ein Beispiel bearbeitet und dann den andern vorgestellt hat.	Nicht sehr lehrreich, aber dafür sehr interessant.	Die Herleitung der Formel für die nicht abbrechende Reihe ist im Skript für meinen Geschmack zu wenig ausführlich dargestellt.
Betime (3)	Es war spannend, was von Achilles war. Dies lenkte die Aufmerksamkeit auf Sie, weil alle wissen wollten, was Achilles uns zu sagen hatte.	Es war schon ein wenig merkwürdig, nachdem Sie uns die Geschichte erzählt hatten, waren wir noch ziemlich verwirrt und hätten danach noch wortlose Darstellungen inszenieren sollen. Es war eine harte Konfrontation, jedoch erwies sie sich als sinnvollste Weise, das Problem anzugehen. Denn unser eigenes Nachdenken wurde angeregt.	Ich konnte das Experiment mit den Gläsern nicht einordnen, es verwirrte mich anfangs wieder, doch es machte einen Sinn, weil es unter anderem zeigte, dass das Denken weitaus mehr im Stande ist zu akzeptieren als die Tätigkeit. Wir glauben, dass man es immer in neue Gläser schütten kann, jedoch physikalisch weniger möglich.	Es ist immer brauchbar, eine Zusammenfassung mit allen Formeln und Erläuterungen zu besitzen. So hat man auch ein Nachschlageblatt, wenn einem etwas noch unklar scheint.	Auch all die andern Beispiele waren anfangs sehr unklar und allein nicht lösbar, doch nach der Besprechung war es einfacher, auch an solche Beispiele ranzugehen, denn man kannte das, so geht die Taktik! Im Nachhinein waren all die Parallelgeschichten und Beispiele hilfreich.		+ Es gibt Dinge, die man nicht erklären kann, oder bei denen physiologische Aspekte nicht mit dem mathematischen oder mentalen Aspekt zusammenpassen. - Die Diskussionen im Kreis waren zu zeitaufwändig. Es ist zwar sehr schwierig, ein solches Thema zu bearbeiten, aber die Kreisdiskussionen entwickelten sich zu unruhigen, aneinander vorbei redenden Lektionen.
Dominik (4)		Dieses Vorgehen hat mir sehr geholfen, die Geschichte fassbarer zu machen und ich konnte mir vorstellen, was Zenon gemeint hat.	Durch die Grafiken war schnell zu erkennen, dass Zenon nur bedingt richtig liegt, denn die Zeit wird nicht klar berücksichtigt. Das Experiment mit den Gläsern hat dann auch gezeigt, wie schwierig es am Schluss ist, den Abstand zwischen Achilles und der Schildkröte zu bestimmen.	Durch das Erstellen dieser Formel wurde mir klar, dass Zenons Theorie stimmt, jedoch nur mathematisch.	Hier hat es mich verblüfft, dass beim Würfelturm alle Würfel nicht einen unendlich hohen Turm geben müssen. Das Bild von Escher zeigte mir, dass all das, was wir in der letzten Zeit erarbeitet haben, auch eine Anwendung findet.		Diese Unterrichtseinheit hat mir die Unendlichkeit ein wenig näher gebracht.

Philippe (5)	**Für meinen Geschmack natürlich zu kurz, aber sicher eine gelungene Einstimmung.**	**Das Thema fesselte mit seinem offensichtlichen Paradoxon, da die Erklärung trotz Plausibilität unseren Vorstellungen widersprach. Zu Beginn zu wenig zielgerichtet, die Grundaussage blieb aber sicher haften. Eventuell würde eine Art „Kriterienliste“ das Verfahren abkürzen…**	**Die philosophischen Ansätze gaben der Materie sichtliches Leben, die Parallele zwischen dem Rennen und den Gläsern half ebenfalls, den Themenbereich zu erweitern. Vielleicht hätten die konkreten Ergebnisse jeder Lektion festgehalten werden müssen, um weniger Zeit mit „Auffrischen“ zu verplempern.**	**Die Verallgemeinerung lief zu schnell ab, unter Umständen hätte ein gemeinsames Durchgehen der Theorieblätter besser gewirkt.**	**Das gruppenweise Bearbeiten der Aufträge war ein guter Ansatz, wir konnten uns intensiver mit einem Problem befassen. Auch wenn die Verteilung natürlich Glückssache war … Escher war ein anschaulicher Abschluss.**	**Die „Briefe“ zeigten sicher den Verlust an Verwirrung auf, auch wenn ihr praktischer „Nutzen“ nicht unbedingt klar greifbar ist.**	**Ich mochte die Verbindung der Mathematik mit der Philosophie (Ansatz der „Unendlichkeit“) und das Arbeiten mit einem antiken Beispiel. Die Denkanstösse waren sicher gut, auch wenn die mathematische Komponente gelegentlich unterging.**
Nadine (6)	**Ich finde es gut, dass du uns einen Einblick in die Zeit Zenons ermöglicht hast, So fiel es mir leichter, mich in die Denkweise von damals hineinzuversetzen.**	**Durch selbständiges Denken „lebten“ wir uns in die Situation ein, die uns von Zenon beschreiben worden war.**	**Mit dem Beginn der zahlenmässigen Annäherung begann ich den Zusammenhang etwas zu sehen. Durch die Grafiken stellten wir fest, dass Achilles die Schildkröte sehr wohl einholt, zumindest in der Realität. Dies war etwas beruhigend. Auf zahlenmässiger Ebene leuchtet mir der Gedanken Zenons ein (Brüche → 0). Jedoch übersteigt es meine Vorstellungskraft zu glauben, dass eine endliche Strecke in unendlich viele Abschnitte geteilt werden kann.**	**Mit dem Verstehen dieser Theorieblätter habe ich ein wenig Mühe, da sie mir sehr komplex erscheinen. Die Anwendungen finde ich angenehmer**	**Plötzlich tauchten Zusammenhänge zur Realität auf, wie z. B. das Bauen des Turmes im Kinderzimmer. Sobald ein Beispiel vorliegt, das den Beschreibungen entsprechend nachgeahmt werden kann, sind die Gleichungen einleuchtend und klar. Die Bilder von M. C. Escher waren eine angenehme Untermalung – auch einmal noch etwas fürs Auge.**	**Ich finde die Idee mit dem Brief gut. So reflektieren wir nochmals unser Vorgehen und unsere Gedanken, durch die wir schliesslich der Lösung des Problems näher kommen konnten.**	**Zu Beginn war ich überfordert. Das Ganze war sehr abstrakt und wirkte beinahe einschüchternd auf mich. Ich denke, durch die langen Gespräche am Anfang läuft man Gefahr, abzuschweifen, da viele Gedanken oftmals wiederholt werden. Ich hatte das Gefühl, wir bewegen uns im Kreis. Das Einbeziehen verschiedener anschaulicher Beispiele erleichterte dann aber das Verstehen.**
Simon (7)	**Geschichten und Mythen finde ich immer spannend – diese Einführung gefiel mir deshalb.**	**Die Geschichte schuf Verwirrung, was zu diesem Zeitpunkt jedoch auch sinnvoll war. Das Arbeiten in Gruppen gefiel mir.**	**War teilweise etwas langfädig, jedoch spannend, das Problem immer wie genauer zu realisieren und es mit der Zeit in den Griff zu bekommen.**	**Zum Vergleich mit den Lektionen 3 bis 7 gab es in der 8. Lektion für meinen Geschmack zuviel neuen Stoff auf einmal. Ich brauchte länger, um diesen zu verarbeiten.**	**Sehr spannend, auf was sich diese Problematik alles übertragen lässt und wie gut man Resultate durch die Formeln herausfindet. Bild Escher zeigt nochmals die Problematik der zenonschen Theorie auf: „Unendlich viele Fische in einem beschränkten Raum.“**	**Die Briefe, die wir einander vorlasen, waren vereinzelt sehr interessant und allgemein amüsant.**	**+ Zenon war mehrere Male live bei uns. Gruppenarbeiten Ausweitung der Problematik - Teilweise etwas langfädig**
Achim (8)	**Es war interessant, dies einmal zu hören, obwohl einem viel nicht geblieben ist (Zeit, Lebenswerke, Abfolge, Namen …)**	**Durch das persönliche Nachdenken wurden jedem die Problematik und Komplexität des Rätsels bewusst. Es wurde jedoch noch nichts klar, alle formulierten Antithesen.**	**Nach und nach begannen in unseren Köpfen die Lämpchen aufzuleuchten. Der Begriff der Unendlichkeit wurde konkretisiert. Man kam dem Schlüssel des Rätsels langsam auf die Spur. Dinge der Unmöglichkeit wurden überdacht.**	**Erkenntnis, dass Unendliches im Endlichen Platz hat, kam auf. Die Theorieblätter, na ja …**	**Das Gelernte konnte nun an verschiedenen Ansätzen angewendet, modifiziert werden. Dadurch wurde das Ganze noch klarer. M. C. Eschers Bilder sind genial.**	**Die Briefe waren amüsant, viel Nützliches gebracht haben sie nicht.**	**Es war gut, wieder einmal durch eigenes Denken auf die Lösung eines Problems zu stossen. Die mathematische Erfassung war nachvollziehbar und interessant, da unendliches Streben auf einen Punkt gebracht werden konnte.**
Tanja (9)	**Die Einleitung hat mir sehr gefallen, da man damit einen Bezug auf das Thema bekommt. Zudem finde ich die Geschichte über Troja (die jetzt ja auch verfilmt wird) sehr interessant. Vielleicht kann man in 1-2 Jahren die Einleitung so beginnen: „Kennt ihr den Film …“**	**Es war am Anfang schwierig, etwas darzustellen ohne zu wissen, auf was man dann später hinaus will. Zudem waren wir alle noch der Meinung, dass Zenons Äusserung falsch sein musste, da sie ja mit der Realität nicht übereinstimmt.**	**Das war wiederum sehr gut, da wir endlich das Vorgegebene in der Realität sehen → Gläserexperiment. Nun konnte man nicht sagen, dass der Glasinhalt nicht unendlich teilbar ist.**	**Die Theorieblätter kamen im richtigen Moment, da man langsam in all diesen Behauptungen, Widersprüchen, Theorien nicht wusste, welche richtig waren und für uns wichtig sind. Somit haben die Blätter für Klarheit gesorgt.**	**Die Beispiele waren gut erdacht und es war gut, Aufgaben zu lösen ausser nur Theorie zu lesen. → Es war gut das Theoretische anzuwenden.**	**Das Finale war gut ausgearbeitet. Wir haben einen Kreis geschlossen, machten eine Kurzrepetition und die Parallelsituationen zeigten dieselbe Geschichte mal anders. Auch der Brief war gut, da man sich somit alles nochmals im Kopf überdacht hatte.**	**Diese Unterrichtseinheit wird mir sicher in Erinnerung bleiben, da wir hier mit „Besuchen“ sowie Experimenten, aber auch als Klasse dem Thema Schritt für Schritt näher kamen. Alles in allem war es gut und sollte so weiter übernommen werden. Es war sehr gut und abwechslungsreich und bleibt einem so besser im Gedächtnis.**
AA (10)	**Nicht mehr beurteilbar.**	**Interessante Konfrontation zwischen der Behauptung und der Realität.**	**Etwas schwerfällig, da sehr philosophisch und ohne zu erkennendes Ziel geführte Diskussion.**	**Auflösung des Rätsels: Erst hier wurde mir (persönlich) die Grundproblematik, das Grundthema klar. Theorieblätter etwas kompliziert.**	**Interessante Berechnungsbeispiele.**		**Am Anfang war’s sehr schwerfällig. Themeneinstieg wäre wohl einfacher gewesen: Das Hauptthema (Folgen/ Grenzwerte) gerade nach dem Einstieg bekannt geben, nicht erst in der Vertiefung. Wir diskutierten ohne Fortschritte ziemlich lange am Kernproblem herum, was beinahe eine „Gedankenrotation“ zur Folge hatte: Man kam denkerisch nicht vom Fleck. Jedoch guter Übergang zu konkreten Anwendungsbeispielen.**

BB (11)	**Hans verkleidet als Erzähler in der damaligen Zeit war lustig anzusehen. Die Geschichte glaubte ich aber nicht, hielt sie für einen Scherz.**	**Es wurde viel diskutiert und überlegt. Widersprüche, Zweifel waren bei vielen von uns immer noch vorhanden. Es hatten immer noch viele die Vorstellung, dass Achilles sowieso die Schildkröte einholt. (Mit der Zeit wurden die Zweifel etwas kleiner, aber es entstanden viele Fragen.)**	**Die Graphiken aufzustellen war schon ein wenig anspruchsvoll. Das Experiment mit den Gläsern fand ich gut, damit wurde die Geschichte von Zenon etwas glaubwürdiger. Es war eine gute Veranschaulichung der Probleme. Physikalisch gesehen ist es nicht mehr möglich, mathematisch betrachtet aber durchaus möglich.**	**Endlich etwas, was uns unsere (vielleicht) letzten Fragen beantworten konnte. Formeln und Anwendbarkeit sind alle beisammen.**	**Die Aufteilung der Aufgaben und am Schluss die Besprechungen, Erläuterungen und den Lösungsweg gemeinsam gestalten, fand ich eine mal anders geplante Arbeitsweise, aber interessant.**	**Das mit den Briefen finde ich einen guten Schluss.**	**Besonders gut gefiel mir, dass wir oft im Plenum gearbeitet haben und so miteinander zur Lösung des Problems kamen. Die experimentellen Veranschaulichungen halfen, das Problem verstehen und lösen zu können. Bei einigen Aufgaben hatte ich oft keine Ahnung, sass ratlos vor einer Aufgabe. Das nervte mich selbst. Und die Diskussionen im Kreis waren zu lang, man hätte es auch schneller auf den Punkt bringen können.**
CC (12)	**Die Einleitung war sehr informativ und damit konnte man sich das Ganze etwas besser vorstellen und man kannte vor allem auch die Leute (Zenon & Achilles).**	**Bei diesem Schritt, muss ich sagen, war ich schlichtweg überfordert. Wenn man vor so eine unlogischen Geschichte gestellt wird, man hat keine Ahnung auf was die Geschichte hinaus will, ist es doch ziemlich heftig da plötzlich Darstellungen aufzustellen.**	**Das Diskutieren in der Klasse war hingegen ziemlich hilfreich und bei der Geschichte mit den Gläsern kam auch langsam der Gedanke ans Unendliche und somit etwas Klarheit und Verständnis auf.**	**Klare Übersicht (sehr hilfreich) durch die Theorieblätter.**	**Teilweise wieder das Gefühl der Überforderung, aber nachdem wir die Beispiele besprochen hatten, herrschte „ziemlich“ schnell Klarheit.**		**Die Idee, ein Rennen in unendlich viele Teile zu zerlegen ist zwar faszinierend, aber vor allem verwirrend. Verbesserungsmöglichkeiten sehe ich kaum. Man ist einfach am Anfang tatsächlich regelrecht überfordert und kommt sich ziemlich hilflos vor bei der ganzen Verwirrung. Das Ganze diskutieren um Achilles war aber fast zu lange.**
DD (13)	**Es war sehr abwechslungsreich, ein Thema nicht einfach aufzudecken, sondern zuerst eine Person (Zenon) vorauszuschicken. Gute Einleitung.**	**Die Art, die Geschichte mit Bildern darzustellen, ist sehr anspruchsvoll und in diesem Zeitpunkt vielleicht noch verfrüht, denn wir haben die Vorstellung in unserem Kopf, dass Achilles die Schildkröte um jeden Preis überholen muss.**	**Mit dem Glas wird die Geschichte gut dargestellt, denn man kann praktisch verfolgen, wie in einem Glas so viel Wasser ist, wie in den darauf folgenden. War ein Schritt zum Einsehen.**	**Gut, dass zuerst eine Einführung vom Lehrer kommt, danach die Blätter zum selber Nachlesen und zum Schluss die Arbeit mit dieser Theorie.**	**Die ersten Versuche der Theorie an der Praxis. Der Schritt, zuerst selber überlegen, danach Hilfe vom Lehrer im Unterricht und danach wieder selber die Mathematik lösen, gefiel mir.**	**Der Brief an Zenon holt alles, was man im Hinterkopf behalten hat, wieder hervor und kann so eine gute Probenvorbereitung sein.**	**Verbesserungen: Manchmal waren die Gespräche zu lang und man merkte es dann an der Aufmerksamkeit. Lieber kürzer! -- Lehrreich war, dass ich etwas erfahren habe, mit welchem wir schon lange umgehen, aber nie darüber nachdenken → Das Teilen ins Unendliche. Eindrücklich waren Zenons Besuche sowie die Demonstration mit dem Wasser.**
EE (14)	**Informationsreich → man kann sich die Zeit und vor allem die Denkweise der Menschen in dieser Zeit besser vorstellen.**	**Gelungener Versuch, Zenons Überlegung auf verschiedenste Arten darzustellen, jedoch dauerte die Diskussion etwas zu lange. Zum Teil diskutierten wir dasselbe immer wieder und immer wieder.**	**Das Experiment zeigt, dass Zenons These nur theoretisch möglich ist. Das Problem ist nur rein mathematisch lösbar.**	**Endlich lässt sich die Überlegung Zenons in Zahlen ausdrücken. → Achilles und die Schildkröte ist nicht nur begriffen worden, sondern auch mathematisch zu beweisen.**	**Sorgt für mehr Übersicht / Verallgemeinerung.**	**Der Brief an Zenon war ein gelungener Versuch, Zenons Überlegung zusammenfassend in Worte zu fassen.**	**Einführung war etwas zu lang.**
FF (15)	**Interessante Erzählung.**	**Gute Idee, der Widerspruch wird gut erkennbar (die Frage: Wie ist es möglich?) Zenons Geschichte erscheint unlogisch \ unmöglich.**	**Kaum Lösungen des Problems, die Verwirrung wird grösser (Was soll das Ganze? Achilles holt die Schildkröte trotz allem ein!!! So ist die Realität!) Dann kommt die wichtige Idee vom Teilen auf (Vorsprung immer weiter halbieren, etc.) → Schneller zum Punkt kommen.**	**Zum ersten Mal haben wir etwas Greifbares, ging aber sehr schnell voran.**	**Beispiele haben z. T. (Bsp. Escherbild) sehr wenig mit Zenon zu tun.**	**Brief an Zenon: Warum?**	**Interessant, faszinierende Idee hinter dem Ganzen, die auch gut hervorkam. Die Einleitungszeit könnte man ein bisschen verkürzen (Diagramme zeichnen, etc.) und dafür das, was auf den Theorieblättern steht, länger erklären. -- Ich finde aber, obwohl ich alles einsehe, kann ich die REALITÄT nie ganz vergessen!! (und die ist, dass wir tatsächlich aus dem Zimmer können und Achilles die Schildkröte einholt.)**
GG (16)			**Waren spannende Stunden, da man das Problem auf eine andere Art als sonst zu lösen versuchte. Das Ganze wurde anschaulicher und war somit einfacher zu verstehen.**	**Theorieblätter sind immer hilfreich, um die Übersicht zu bekommen.**	**Mit Hilfe der Bilder kann man eine Problematik besser behalten. Immer wenn ich ein solches Bild sehen werde, werde ich automatisch an das Achilles Problem erinnert werden.**	**Der Brief wäre nicht unbedingt nötig gewesen, ist aber für jede einzelne Person gut, da sich jeder nochmals Gedanken machen musste.**	**Sicher gut war die Geschichte von Achilles und der Schildkröte. Wenn man viel mit Bildern und Geschichten arbeitet, kann man eine Problematik besser behalten, muss aber sehr viele Lektionen dafür einsetzen. Verbesserungsmöglichkeiten: Weniger arbeiten im Kreis, mehr selbständiges Erarbeiten.**

Die Fragen des Feedbackbogens beziehen sich wiederum auf die einzelnen Akte, wie wir sie zu Beginn der zweiten Lektion nochmals gemeinsam durchgegangen sind. Der Verlauf hängt mit den entsprechenden Blättern immer noch vor uns an der Tafel. Die Feedbacks der Schülerinnen und Schüler sind wiederum in der Tabelle zusammengestellt.

Die informative Ouvertüre wird im Allgemeinen als willkommene Einstimmung geschätzt. Interessant ist der Hinweis von Tanja (9) auf den Film über Troja und die Anregung, künftig damit zu beginnen. Die Geschichte von Achilles und der Schildkröte löst, wie sie es beabsichtigt, vorerst Verwirrung und Widerspruch aus. Das Darstellen bereitet Mühe, wird da und dort als Überforderung erlebt. Es konfrontiert intensiv mit der natürlichen Vorstellung, dass Achilles überholen muss. Im Nachhinein wird das Vorgehen aber doch mehrheitlich als hilfreich und sinnvoll erkannt. Die gebotenen Präsentationen zeigen es ebenso. Die Parallelität zwischen Gläserexperiment und Achillesgeschichte wird wahrgenommen, als hilfreich erkannt (Tanja (9): „endlich das Vorgegebene in der Realität sehen."). Das Experiment weist einerseits den Weg zu Grafiken und Berechnungen anderseits auf den unendlichen Prozess und die heikle Frage nach der beliebigen Teilbarkeit. Vielleicht hätten wir, wie Philippe (5) meint, am Ende dieses Aktes noch intensiver festhalten sollen, was wir gefunden haben, anderseits zeigt sich, dass die Schülerinnen und Schüler sehr unterschiedlich weit in ihrem mentalen Prozess angelangt waren. Erstaunlicherweise wird auf die Palette der graphischen Darstellungen wenig Bezug genommen, obwohl ich denke, dass im Erstellen und Vergleichen dieser Blätter Wesentliches vorgeht. Der Übergang von den konkreten Zahlenbeispielen zur Verallgemeinerung fällt erfahrungsgemäss unterschiedlich leicht. Wer die Theorieblätter sorgfältig studiert, bemerkt, dass wir alles bereits mehrfach im Unterricht besprochen haben. So werden diese strukturierenden Blätter mehrheitlich als sehr hilfreich taxiert. Die verschiedenen Anwendungsbeispiele werden geschätzt, das wechselweise Bearbeiten individuell und im Plenum ist fruchtbar. Besonders das Escherbild und der Würfelturm werden vielen lange in Erinnerung bleiben. Dass wir schliesslich nicht alle Beispiele gleich intensiv behandelt haben, stört niemanden. Das Finale ist geprägt durch die Briefe, die als Zusammenfassungs- und Reflexionsinstrument gewürdigt, aber zum Teil als überflüssig betrachtet werden. Die Briefe zeigen, dass sich nicht alle Schülerinnen und Schüler in Sinne einer Schlussbilanz zur Geschichte eingelassen haben. Sinn und Zweck dieses Briefes will ich das nächste Mal vorgängig besser kommunizieren.

Die Schlussbilanz fällt mehrheitlich positiv aus. Besonders das Arbeiten mir der Geschichte und an den Bildern wird geschätzt und verspricht Nachhaltigkeit. Das gemeinsame Ringen um ein Verstehen wird einmal mehr von einigen als zu langfädig empfunden. BB (11) schreibt: „Und die Diskussionen im Kreis waren zu lang, man hätte es auch schneller auf den Punkt bringen können." Ich glaube aber, dass es auch hier keinen „Königsweg" gibt.

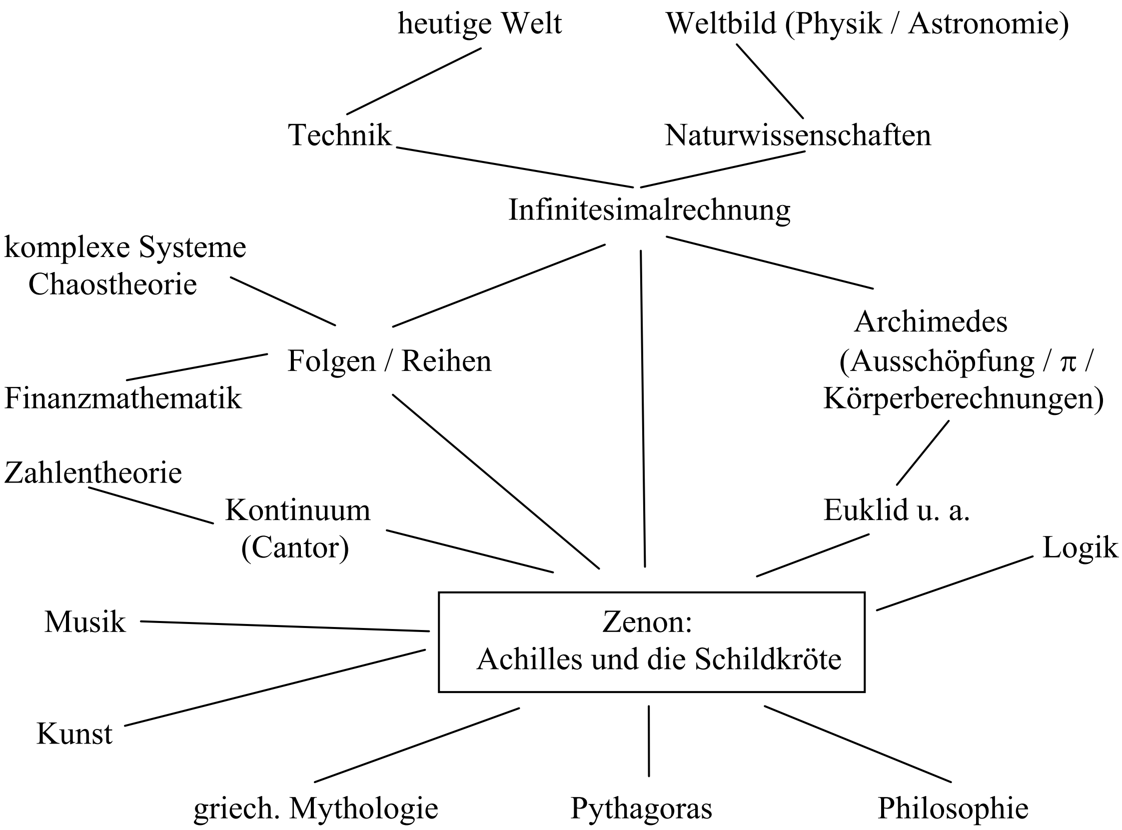
Die Rückmeldungen zeigen, dass das ganze Lehrstück sehr unterschiedlich durchlebt wurde. Philippe hat sich vorwiegend auf die historische und philosophische Komponente konzentriert. Betime war wohl zu sehr verwirrt und überfordert. Vieles ist für sie auch am Schluss noch schleierhaft und unklar, auch wenn sie die Fragen nicht formulieren kann. Immerhin kann sie den verschiedenen Beispielen Positives abgewinnen und sie wird sich auf die Theorieblätter abstützen.

Für die meisten Schülerinnen und Schüler war es doch ein Weg zu mehr Erkenntnis in Bezug auf unsere physikalische Welt und ihre Mathematisierbarkeit sowie auf die Unendlichkeit, auch wenn es nicht alle wie Achim zum „Meister der Unendlichkeit" gebracht haben.

4.5 Didaktische Interpretation: Methodentrias

Exemplarisch:
Die Geschichte „Achilles und die Schildkröte“ öffnet die Pforten für eine tiefe Auseinandersetzung mit dem „unendlich Kleinen“ und damit verbunden mit nicht abbrechenden Prozessen. Diese Fragestellungen rund um das „Beliebig–nahe–Kommen“, um Grenzen und Grenzwerte samt auftauchenden Schwierigkeiten und Paradoxien sind ganz zentral für die Mathematik. Gemäss dem bekannten Mathematiker Henri Poincaré bedeutet Mathematik betreiben ohnehin „Geschichten erzählen über das Unendliche“. Und diese Geschichte verwirrt uns mit ihrer treffenden Logik und der unserer Erfahrung völlig widersprechenden Schlussfolgerung; sie fordert uns unmittelbar heraus, über das Unendliche nachzudenken, es physisch mitzuvollziehen und mitzuerleben. Die Auseinandersetzung besitzt weiterhin grosse Aktualität. Einerseits fasziniert die Welt des „unendlich Grossen“ beim Blick ins Universum und die Welt des „unendlich Kleinen“ beim Blick ins Mikroskop den Menschen und besonders den Jugendlichen, anderseits stellen gerade heute die Naturwissenschaften vermehrt die Frage, ob der konkrete physikalische Raum überhaupt beliebig oft teilbar ist. Nach den Theorien massgebender heutiger Physiker gibt es kleinste Masse von Raum und Zeit, die sich nicht weiter unterteilen lassen. Dies wiederum würde die Lehre der Pythagoräer bekräftigen, insofern sie sich auf die Naturphänomene bezieht! Es bleibt vorläufig offen, in wie weit unsere gedachte infinitesimale Teilung von Raum und Zeit in der physikalischen Welt Realität ist.

Die thematische Landkarte zeigt folgendes Bild:



Obwohl es in der physikalischen Welt keinen Hinweis auf unendliche Teilung von Raum und Zeit gibt, setzen die Mathematiker eine uneingeschränkte Teilbarkeit voraus – sie sprechen vom Kontinuum, dem lückenlos Zusammenhängenden, in dem es keine Leerstellen gibt – als

Grundlage ihres Denkgebäudes und entwickeln darauf unter anderem die Infinitesimalrechnung. In den vielfältigen Beispielen begegnet uns die Unendlichkeit als die ewige Wiederkehr des Gleichen. Sie machen das Phänomen erst überschaubar und fassbar. Eine entscheidende Entdeckung tritt dabei in unser Bewusstsein: Wir sehen ein, dass – uneingeschränkte Teilbarkeit vorausgesetzt – die Addition von unendlich vielen positiven Grössen nicht notwendigerweise unendlich gross werden muss. Dies zu erfahren, einzusehen und zu bejahen, ist wohl *die* Herausforderung des Lehrstücks. Ein Paradigmenwechsel, der nur auf Grund verschiedenster Beispiele und gegen grossen inneren Widerstand individuell vollzogen werden kann. Erstaunlich und beeindruckend ist, dass uns trotz der Annahme eines Kontinuums in Raum und Zeit die Mathematik exakte Antworten liefert auf Probleme der wirklichen Welt. Unsere technische Welt sähe ohne diese Denkgrundlagen völlig anders aus und wir fragen uns mit Aczel (2002, S. 219): „Wie könnte ein Verfahren, das auf dem Kontinuum beruht, so erfolgreich sein, wenn es das Kontinuum gar nicht gäbe?“ Zwar können wir mit Formeln, Funktionen und Graphen das scheinbar Widersprüchliche bewältigen, aber eines bleibt: „… nämlich das Paradoxe, was darin liegt, dass eine unendliche Aufeinanderfolge, deren Vollendung wir in der Vorstellung nicht nur faktisch, sondern auch grundsätzlich nicht vollziehen können, in der Wirklichkeit abgeschlossen vorliegen soll.“ (Wittenberg 1990, S. 224). In den Geschichten von Zenon konzentrieren sich die genannten Probleme und durch Anlagerung verschiedenster verwandter Situationen ist es möglich, diese Problematik vielfältig und optimal zu erschliessen. Dies macht Zenons provokative Anstösse so fruchtbar und wertvoll.

Genetisch:
Die Geschichten von Zenon, wie sie uns Aristoteles überliefert, bieten einen lebendigen und genetisch echten Zugang zur Auseinandersetzung mit dem unendlich Kleinen, mit der fortgesetzten Unterteilung von Raum und Zeit. Es ist Absicht von Zenon zu verwirren und zu provozieren, insbesondere die Pythagoräer, welche sich ganz auf rationale Verhältnisse abstützen. Diese Geschichten haben während fast 2500 Jahren die Menschen erfasst und sie erschüttern uns auch noch heute. Dank ihrer Lebensnähe und Einprägsamkeit werden wir unmittelbar angesprochen. Mit all unseren Sinnen sind wir gefordert: Wir können den Prozess spielen, zeichnen, singen, klopfen und klatschen, … und gerade dieses intensive Eintauchen in die Problematik, die Auseinandersetzung mit dem Problem in den verschiedensten Variationen bringt uns weiter. Dieses „Beliebig–nahe–Kommen“, das zu Konvergenz und Grenzwert führt, wird bei Achilles, bei den Gläsern, bei der Kaffeetasse, bei der Uhr, bei den Fraktalen … erlebt und mit ihnen verknüpft. So wird uns die volle Kaffeetasse immer wieder daran erinnern, dass die Summe von unendlich vielen positiven Grössen einen endlichen Wert haben kann und dass Raum und Zeit vielleicht gar nicht beliebig oft teilbar sind.

Diese Geschichten von Zenon haben seit bald 2500 Jahren immer wieder bedeutende Denker wie Descartes, Leibniz, Bergson, Russel herausgefordert und damit die Mathematik und die Philosophie entscheidend mitgeprägt. Und wo wäre unsere Technik, wie sähe unser Weltbild aus ohne diese Herausforderungen?

Dramaturgisch:
In der Ouvertüre tauchen wir mit dem Kennenlernen von Zenon und seinem Hauptakteur Achilles zügig ein in die griechische Antike. Mit ganzer Wucht entfaltet Zenon seine provokative Geschichte von Achilles, der im Wettlauf die Schildkröte nie einholen wird. Diese vorerst leicht verständliche Geschichte fasziniert und verwirrt zugleich. Der Blitz des Problems zündet. In Kleingruppen wird heftig diskutiert, einzelne Schülerinnen und Schüler

ereifern sich. Die wortlosen, dafür handfesten szenischen Darstellungen zwingen uns, Zenons Argumentation zu folgen und nicht allzu früh der bisherigen persönlichen Erfahrung zu erliegen. Jetzt sind wir mitten drin in der Erschütterung, im Widerstreit unserer Wahrnehmung und bisherigen Erfahrungen die besagen, dass Achilles sehr wohl und locker die Schildkröte überholen wird, mit dem Verstand und Zenon, welche darauf beharren, dass Achilles die Schildkröte nie einholen wird. Die Segel sind gesetzt. Das dramaturgische Ringen um die Annäherung dieser beiden Standpunkte kann beginnen.

Mit Zahlenbeispielen, Graphiken, Zeichnungen, Formeln geht die Auseinandersetzung weiter, werden erste Lösungsansätze erprobt. Und da taucht ein zweites Mal unser Provokateur Zenon aus dem Hintergrund auf und provoziert mit einer neuen Geschichte.

An Hand des Gläserbeispiels und der verschiedenen Lösungsansätze mit Zahlenbeispielen und Graphiken kommen wir im gemeinsamen Ringen dem Problem näher. Nur langsam nehmen wir Abschied von der irrigen Vorstellung, dass die Addition von unendlich vielen positiven Grössen automatisch unendlich gross werden muss.

Aus den verschiedenen Zahlenbeispielen kristallisiert sich eine zugehörige Formel, in der dieser ganze Annäherungsprozess eingebunden ist. Eine erstaunliche Fülle von weiteren Situationen dieser Art zeigt, dass die der Geschichte immanente Problematik zum Alltag gehört, allgegenwärtig ist in unseren Bewegungen, in Musik und Kunst. Zenon begleitet uns durchs ganze Lehrstück, von seinem ersten Auftritt bis zum Moment am Schluss, in dem die Schülerinnen und Schüler ihm einen Brief schreiben und darin nochmals etwas vom langen Prozess aufleben lassen, den wir im Lehrstück gegangen sind.

Dieses Lehrstück von 15 bis 20 Lektionen Umfang konzentriert sich auf den unendlichen Regress ins Kleine, auf Annäherung, Konvergenz und Grenzwert anhand der geometrischen Folge. Wie sich Achilles der Schildkröte nähert, so nähern wir uns asymptotisch Schritt um Schritt der „Lösung“ des Problems, der Erklärung der Paradoxie samt ihren letzten philosophischen und metaphysischen Fragen nach der beliebigen Teilbarkeit von Raum und Zeit, welche auch heute noch nicht abschliessend gelöst sind.

4.6 Das Lehrstück in der Fachschaft

Auf Wunsch von Heiner Rohner präsentierte ich das Lehrstück am 19. Februar 2003. Obwohl ich alle Fachkollegen, etwa ein Dutzend an der Zahl, eingeladen hatte, erschienen nur deren zwei: Heiner vom Wirtschaftsgymnasium und Daniel vom mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium. Diese verfolgten den einstündigen Durchgang durch das Lehrstück mit viel Interesse. Da bei beiden dieses Thema bis heute im Unterricht nicht fällig war, wurde das Stück nicht weiter verfolgt.

Nach einer Unterrichtslektion ist kürzlich ein Fachkollege in meinem Zimmer aufgetaucht. Nachdem ich ihm, ausgehend von der beschriebenen Tafel, den Ablauf des Lehrstücks geschildert hatte, war seine spontane Antwort: „So klar und einleuchtend habe ich das noch nie gehört.“ Inzwischen habe ich drei Lehrkräfte aus anderen Schulen, die sich sehr für dieses Lehrstück interessieren und vermutlich bald eine Inszenierung wagen. So zum Beispiel ein Kollege aus Trogen. Er ist von der Vielfalt der Anwendungen begeistert und möchte den Philosophen Zenon im Lehrstück mehr Gewicht geben. Ich hoffe sehr, dass bald einige Kollegen diese Unterrichtseinheit aufnehmen werden, denn ich bin überzeugt, dass hier ein lehrreiches und bedeutungsvolles Lehrstück vorliegt.

4.7 Die Ideengeschichte im Lehrstück

Mit der einfachen Geschichte von Achilles und der Schildkröte werden wir herausgefordert, über das Unendliche nachzudenken (Grundidee [9]). Die Geschichte ist entstanden in einer Zeit, in der der Mensch, herausgefordert durch die Diagonalen in Quadrat und im regelmässigen Fünfeck, begann, über das Unendliche nachzudenken. Die rationalen Zahlen genügten nicht mehr. Toeplitz (1949, S. 2) schreibt über Zenon: „Er protestiert gegen den Abgrund des unendlichen Prozesses.“ Ebenfalls im 5. Jhdt. vor Christus thematisiert Anaxagoras: „Es gibt kein kleinstes unter den Kleinen und kein grösstes unter den Grossen, sondern immer noch ein kleineres und ein grösseres.“ (ebd. S. 2) Der unendliche Prozess ist denkbar, wird mathematisch fassbar, kann aber in der Vorstellung nicht bis zum Ende vollzogen werden. Auch physikalisch ist der Prozess im Einzelnen nicht vollziehbar, obwohl er nach bestimmbarer Strecke und berechenbarer Zeit abgeschlossen vorliegen soll.

Verbunden mit diesem Wettlauf stellt sich die Frage nach der angemessenen Modellierung [3]. Zenon legt uns überzeugend dar, was eigentlich nicht sein kann, denn es widerspricht unserer Alltagserfahrung. Und doch, die Darlegung überzeugt. Ein zweites Modell mit linearen Funktionen liefert einen wohl bestimmten, sichtbaren Schnittpunkt, ein einleuchtendes Resultat. Aber sind diese beiden, offenbar so widersprüchlichen Modelle vereinbar? Schliesslich erkennen wir, dass beide Modelle, jedes auf seine Art, den Vorgang hervorragend beschreibt und dass die Folgerung dieselbe ist. In den Ausweitungsbeispielen erhalten die Schülerinnen und Schüler vielfältige Gelegenheit, Modelle zu entwickeln, welche den Ausgangssituationen angepasst sind.

Bei diesen Modellbildungen herrschen zwei funktionale Abhängigkeiten [7] vor: Die lineare und die exponentielle Beziehung. Die lineare Funktion beschreibt die gleichförmigen Bewegungen von Achilles und Schildkröte sowie von den Uhrzeigern. Betrachten wir die Aufholvorgänge, das Halbieren der Flüssigkeit, die Spiralen, die expandierenden Fraktale oder die Schenkungssteuer so werden die Zusammenhänge exponentiell. In all diesen Beispielen dominiert der unendliche Prozess, der sich algorithmisch beschreiben lässt [8]

In diesen Beispielen spielt auch die räumliche Struktur [6] eine wichtige Rolle, diese unendliche Teilung der Strecke. Will ich von A nach B gelangen, so liegen mir immer unendlich viele Punkte dazwischen, auch wenn ich den Grossteil der Strecke zurückgelegt habe, schon hautnah bei B bin. Ich kann wieder und wieder die Hälfte der Strecke zurücklegen und werde B nie erreichen. Wir können – mindestens gedanklich – beliebig weitere Würfel auf den Turm legen, die Decke des Kinderzimmers wird nie erreicht. Unsere Teetasse wird nie leer. Es gibt eine gegenseitige fruchtbare Erschliessung zwischen diesen räumlichen Beispielen und den geheimnisvollen Zahlenreihen [4] wie $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$.

Die Tabelle soll die Repräsentanz der Grundideen in diesem Lehrstück verdeutlichen:

Grundidee	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**	**[6]**	**[7]**	**[8]**	**[9]**	**[10]**
Repräsentanz	•		• • •	• •		• •	• • •	• •	• • •	