Rolf Schudel/Barbara Krzensk

Wahrscheinlichkeitsrechnung
Neuartige Denkfiguren lernen, mit Pascal und Bernoulli

Die Mathematik stimmt nicht mit dem praktischen Leben überein! Der Chevalier de Méré äußerte diesen Satz gegenüber Blaise Pascal, weil er im Glücksspiel mit Würfeln Erfahrungen gemacht hatte, die er mit dem proportionalen Denken nicht erklären konnte. Pascal beschäftigte sich daher mit dem Glücksspiel und begründete die Wahrscheinlichkeitsrechnung, eine Disziplin, bei der unser proportionales Denken versagt.

Im Unterschied zu Pascal untersuchte Jakob Bernoulli Zufallsexperimente, deren Wahrscheinlichkeiten sich nicht a priori ermitteln lassen. Durch das Gesetz der großen Zahl prägte er den Begriff der statistischen Wahrscheinlichkeit.

Durch Spielen mit Würfeln und Astragali lernen wir diese beiden Wahrscheinlichkeitsarten kennen. Anhand des de Méré-Problems erfahren wir die Gesetze der Mehrstufigen Zufallsexperimente. Dadurch sind wir in der Lage, interessante und paradoxe Phänomene aus der Stochastik zu untersuchen.

Übersicht

Feedback der SchülerInnen

Einleitung: Nach etwa einem Jahr im Kurs von Hans Christoph Berg in Thun sah ich mich vor die Aufgabe gestellt, im folgenden Herbst eine Studienwoche mit ViertklässlerInnen unseres Seminars durchzuführen. Meine Idee, das Thema Stochastik zum Kern eines Lehrstückes zu machen stieß bei Hans Christoph Berg sofort auf Gegenliebe, und er gab mir als Einstieg ein Papier, in dem eine Studentin darstellt, wie sie in das Gebiet der Stochastik eingestiegen ist: Mit Hilfe eines normalen und eines gezinkten Würfels hat sie die SchülerInnen dazu gebracht, auf die Idee der statistischen Wahrscheinlichkeit zu kommen. Von dieser Idee wollte ich ausgehen, darauf aufbauend dann die a-priori und die a-posteriori Wahrscheinlichkeiten einander gegenüberstellen und die grundsätzlichen Unterschiede zwischen stochastischen und klassisch-mathematischen Fragestellungen erarbeiten. Schlagworte dazu: „Der Mensch denkt in Proportionalitäten“ oder „Das menschliche Gehirn ist nicht so verdrahtet wie es stochastische Probleme eigentlich erfordern würden“!

Im folgenden halben Jahr arbeitete ich am Stück mit dem Ziel, es im Spätherbst 1997 in der Studienwoche zum ersten Mal durchführen zu können.

Dieser Bericht umfasst nun im ersten Teil eine Schilderung dieser Studienwoche mit Überlegungen und Ideen für eine Neukonzeption des Stücks. Im Spätherbst 98 haben wir mit einer anderen Klasse wiederum eine Studienwoche zum Thema Stochastik im Engadin durchgeführt. Fast parallel habe ich Stochastik im kursorischen Unterricht mit zwei vierten Klassen behandelt. Zu diesen Aufführungen gibt es einige Anmerkungen, ausführlich berichten wir im zweiten Teil über die Engadiner Studienwoche.

Die erste Aufführung: Die Tessiner Stochastik-Studienwoche (November 97)

Ouvertüre: Der Spieler

Nach einer mehrstündigen Zugsfahrt ins Tessin haben wir unser Lagerhaus am frühen Abend in Beschlag genommen und vom Keller bis zum Estrich erkundet. Als Spielhöhle haben wir den Dachstock ausgesucht, und wir bestellen die Klasse auf 21 Uhr hierher zur eigentlichen Eröffnung der Stochastik-Woche.

Wir alle setzen uns im Kreis um ein kleines, von Noel mitgebrachtes Roulette, und ich fordere die SchülerInnen auf, Roulette zu spielen. Es wagen sich sofort etwa sechs SchülerInnen ans Spiel, doch sie wissen nicht so recht wie es funktioniert. Auf meine Anregung hin meint Noel, er habe nie irgendwelche Spielregeln dazu erhalten. Es bleibt ihnen also nichts anderes übrig, selber sinnvolle Regeln für die Auszahlung bei allfälligen Gewinnen zu finden. Ich erkläre ihnen einige Setzmöglichkeiten und deren Begriffe und das Spiel geht los, und mit der Zeit gehen die Auszahlungen schon recht schnell über den Teppich. Auch die zuschauenden SchülerInnen haben ihren Spaß daran. Nach einer halben Stunde unterbreche ich das Spiel und gebe einige Gedanken zum Spiel an und für sich (aus „Homo ludens“ von Johan Huizinga), zum Spiel in der Kultur (als Illustration eine kurze Szene aus „Les contes d'Hoffmann“) und komme dann zum Spiel in der Literatur.

„Aber was bedeutet zéro? Dieser Croupier hier, der Krauskopf, rief soeben zéro! Und weshalb zieht er alles ein, sieh doch alles was auf dem Tisch ist? Und den ganzen Haufen behält er für sich! Was hat denn das zu bedeuten?“ Das ist der Beginn eines Zitats aus dem Buch „Der Spieler“ von F. Dostojewski. Ich lese die Szene, in der die Grossmutter das Roulettespiel entdeckt und sogleich in den Sog der Gewinnsucht hineingerät (Seiten 116/117). Danach folgt eine kurze Schilderung von Leben und Werk des großen russischen Schriftstellers. Die Zusammenfassung des Romans „Der Spieler“ und ein Porträt runden das Bild von Dostojewski ab. Zum Abschluss liest Barbara eine zweite Stelle aus dem Spieler vor, in der es um Regeln und Systematik der Roulette-Kugel geht: „ ... An einem andern Tage oder Abend wiederum kommt nur die eine Farbe, Rot zum Beispiel, Schlag auf Schlag heraus, mehr als zweiundzwanzigmal nach der Reihe, dann tritt plötzlich eine kleine Unterbrechung ein und -

wieder folgt Rot, Rot, Rot. Und das dauert mitunter eine lange Zeit, zuweilen sogar einen ganzen Tag.“

I. Akt: Wir würfeln

Barbara stellt sich zuerst vor und führt dann ins geplante Spiel ein. Wir bilden zwei Gruppen und jede Gruppe erhält einen großen, roten, selbstgebastelten Würfel. Jeder Spieler erhält 30 1-Pfennig Stücke. Vor jedem Wurf ein 1-Pfennig-Stück in die Schale geworfen werden. Wer eine Sechs würfelt erhält einen Gewinn aus der Schale ausbezahlt. Wie groß soll dieser Gewinn sein?

Dieses Problem wird in der Gruppe diskutiert und man einigt sich sehr schnell auf einen Gewinn von sechs 1-Pfennig-Stücken. Barbara und ich führen je ein Wurfprotokoll und schreiben alle Sechser, resp. Nicht-Sechser auf und unterbrechen das Spiel nach 50 Würfen. Das Spiel plätschert dahin, die SchülerInnen sind mehr oder weniger lustlos dabei. Es ist zu wenig interessant, die Gewinne sind zu klein, die Regeln zu langweilig. Aus Anstand und weil sie unser Konzept nicht durcheinander bringen wollen machen die SchülerInnen artig mit. Nach 100 Durchgängen fragen wir, ob sie bis jetzt mit den Gewinnen zufrieden sind. Es lässt sich kein einhelliges Urteil heraushören. Wir spielen wieder, hören aber dann bald auf, weil wir in beiden Gruppen sehr wenig Sechser zu verzeichnen haben. Barbara und ich sind beide überzeugt, den gezinkten Würfel erwischt zu haben. (Die genauen Zahlen dazu kann

Barbara nachliefern!) Wir verfolgten mit diesem Spiel die folgenden Ziele: die SchülerInnen sollen sich mit intuitiven Regeln über "ideale Wahrscheinlichkeit", Erwartungswert und faires Spiel klar werden. Aufgrund des gezinkten Würfels sollen sie ihr ideales Modell an die aktuellen Umstände anpassen können und Ideen entwickeln, wie aus den realen Daten ein neues Modell entwickelt werden kann.

Durch den Spielverlauf und die langweilige Spielanlage konnten wir nicht alle diese Ziele erreichen, doch waren die SchülerInnen trotzdem auf die Möglichkeit der Berechnung von a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten mittels Relativen Häufigkeiten vorbereitet.

... auch mit dem Astragalus: Menschen spielen seit Urzeiten. Zum Würfeln benutzten sie tierische Knochen, vor allem die kleinen Knöchelchen aus der Fußwurzel von Schaf oder Ziege, die sogenannten *Astragali* (lat.: talus, dt: Sprungbein). Nicht erst Griechen und Römer haben sich damit unterhalten, sondern schon die Ägypter. – *Homer* erzählt in der *Ilias* (23. Gesang, 62-65, 87-88) wie Achilleus „als nun der Schlaf ihn gepackt und des Herzens Beschwernisse lösend“ von „Patrokles Seele“ besucht und daran erinnert wurde, wie sie schon in der Jugend vereint gewesen: „Damals als ich den Sohn des Amphidamas hatte getötet, unbedacht gegen mein Wollen, aus Zorn beim Spiele der Knöchel.“ – In der *Bibel* würfeln die Soldaten um die Kleider von Jesus Christus.

Wir spielen nun analog zum Spiel mit den selbstgebastelten Würfeln mit einem Astragalus: Wie müssen wir die Regeln festlegen? Die SchülerInnen kommen sehr schnell darauf, die Relativen Häufigkeiten für das Erscheinen der vier möglichen Seiten des Astragalus mittels Testreihen herauszufinden. Da wir genügend Astragali bei uns haben, können wir in Zweiergruppen „würfeln“.

Jede Zweiergruppe macht 200 Würfe, was total 2200 Würfe ergibt. Wir finden eine Relative Häufigkeit für das „Öhrchen“ von 11%, was sehr gut mit anderen ermittelten Werten aus der Literatur über-

einstimmt. (Laut Ineichen kommen zwei Seiten mit je 10%-iger Relativer Häufigkeit vor und zwei Seiten mit je 40%.) Ein wichtiger und berechtigter Hinweis kommt von Daniel: Ist es zulässig, die Tests von 11 verschiedenen Astragali miteinander zu verrechnen?

II. Akt: Ordnung und Chaos

Der Würfel hat uns zu Beginn sofort zur „idealen Wahrscheinlichkeit“ geführt, doch die Realität ist ja eine andere. Es gibt keinen idealen Würfel, alle Würfel sind gezinkt. Der Ansatz von Blaise Pascal und Pierre Laplace ist eine Weiterführung der Ideen Platons: Die a-priori-Wahrscheinlichkeit ist ein idealisiertes Abbild der Realität. Demgegenüber steht der Ansatz von Jakob Bernoulli, der auf Grund des Gesetzes der großen Zahl eine a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses vorschlägt. Diese zwei Positionen sollen das Thema der nachfolgenden Diskussion umreißen. Zum schon vorhandenen Bild von Dostojewski haben wir ein modernes Bild mit dem Thema Ordnung und Chaos gehängt, um die SchülerInnen auf diese Thematik einzustimmen.

Wir haben zwei Tische auseinandergezogen, um so den Graben zwischen den beiden Positionen darzustellen. Auf der einen Seite haben wir den "guten" Würfel und den Pyrit hingelegt, als beispielhaften Ausdruck des Idealen. Gegenüber liegen der gezinkte Würfel und die Astragali, die für das natürliche, chaotische Pendant stehen.

Wir möchten die SchülerInnen zu eigenen Gedanken über die beiden Welten, die beiden Ideen hinter den zwei Tischseiten anregen. Zu zweit sollen sie sich zurückziehen und ein Streitgespräch über diese beiden Positionen führen und wenn möglich aufschreiben. In einer halben Stunde wollen wir uns alle wieder versammeln, um einige dieser Streitgespräche vorgetragen zu erhalten, auf freiwilliger Basis allerdings. Einige SchülerInnen haben sofort verstanden und machen sich daran, anderen ist unklar, was genau zu tun ist. Wir verstricken uns mit ihnen in Diskussionen, und es finden schon eigentliche Streitgespräche in dieser großen Gruppe statt.

Der Auftrag war vielleicht nicht klar genug vorbereitet und formuliert, vielleicht auch zu schwierig. Die nachfolgende Diskussion in der Klasse war zwar sehr konzentriert und interessant, es beteiligten sich jedoch vor allem etwa 4 bis 6 SchülerInnen daran, die anderen hörten zu. Die Überschrift des Streitgesprächs (Puristen vs. Dirty Players, Idealisten vs. Naturalisten) stellte sich auch nicht als sehr glücklich heraus. Wie vorauszusehen war, gab es keine eindeutigen Stellungnahmen für die eine oder andere Seite, jede hat etwas für sich. Einige der interessantesten Aussagen des Streitgesprächs waren:

- Chaos ist die perfekte Ordnung
- Niemand sollte sich anmaßen, die Ordnung im Chaos zu erkennen
- Warum sind die Schafsknochen nicht ideal? Sie erfüllen für das Schaf die optimale Funktion!

Danach lese ich meine Plädoyers für Puristen und Dirty Players vor:

Puristen: Wir haben den idealen Würfel entwickelt, das reine Abbild einer vollkommenen Idee. Die harmonische Form des Würfels ermöglicht durch seine Symmetrie eine genaue Vorhersage der Chance eines bestimmten Ereignisses. Das kommt dem menschlichen Drang entgegen, in alles eine Ordnung zu bringen, die Welt modellhaft abzubilden, Erklärungen für Phänomene zu finden. So sind wir überzeugt, einst die göttliche Ordnung, die Weltformel zu finden.

Wir berufen uns auf den größten aller Philosophen: Plato. Der Geist ist die ordnende Kraft, die der ursprünglichen Idee gerecht wird, und das äquivalente Modell schafft. Dazu brauchen wir die schmutzige Realität nicht. Unser Ziel ist es, zurück zu den Urbildern und Urideen zu gelangen, denn das wahre und ewige Sein haben nur die ausschließlich dem Denken zugänglichen Ideen, die nur unsere Seele kennt. Um das zu erreichen, brauchen wir Harmonie und Ordnung, und das ist nur möglich, wenn Begierde und Willenskraft der Vernunft untergeordnet werden.

Dirty Players: Wir sind das Leben, denn das Leben ist nicht rein, ideal und symmetrisch. Wir sind zurückgegangen zu den Ursprüngen des menschlichen Tuns, des Spiels, des Würfelns. Ein Spiel mit beliebigen Würfeln, seien sie bewusst oder unbewusst gezinkt, denn wie genau stellt ihr eigentlich einen idealen Würfel her. Und wenn ihr glaubt, einen guten Würfel zu haben, wie überprüft ihr das? Aus unseren Betrachtungen lernen wir etwas aus dem Leben fürs Leben. Zugegeben habt ihr mit Eurem Ideal uns erst auf die Idee gebracht, dass wir in Wirklichkeit erst im Nachhinein feststellen können, welche Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Ereignis hat. Aber wir sind nicht stehengeblieben und haben uns dieser Erkenntnis gestellt und daraus gelernt, auf Grund von Erfahrung, die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten zu errechnen.

Die Welt ist nicht Ordnung, nicht Harmonie, nicht Symmetrie, sondern überraschend, unrein, dirty!

Es folgt eine Übungsphase, bei der die Erkenntnisse aus dem 1. Akt vertieft und erweitert werden. Die Arbeitsatmosphäre wird von allen als ausgezeichnet empfunden, auch wenn alle 23 SchülerInnen um einen großen Tisch herumsitzen müssen, weil keine anderen räumliche Möglichkeiten vorhanden sind. Intensiv wird an den Aufgaben gearbeitet, miteinander darüber diskutiert oder der Rat von Barbara oder mir eingeholt.

III. Akt: Geschichte der Wahrscheinlichkeit

Nach einem Abriss über die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung von der Antike bis zur Neuzeit (siehe dazu mein separates Skript) sind wir dann intensiver auf die sogenannte Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingegangen. Dabei geht es uns vor allem um zwei Erkenntnisse:

- die Multiplikationsregel bei mehrstufigen Zufallsexperimenten und
- das Versagen des proportionalen Denkens.

Wir schildern das historische Treffen von Pascal und de Méré, geben eine kurze Einführung in die Person des Spielers der Pariser Gesellschaft und kommen auf das Spiel zu sprechen, das damals in den Salons sehr beliebt war: Ein Spieler darf nach Bezahlen eines bestimmten Einsatzes viermal würfeln und gewinnt, falls in diesen vier Würfen keine Sechs erscheint, andernfalls gewinnt die Bank, sprich de Méré.

Für wen lohnt sich dieses Spiel auf die Dauer? Gemeinsam versuchen wir, diese Frage zu beantworten. Die Regel für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit beim mehrmaligen Würfeln, resp. allgemein bei mehrstufigen Zufallsexperimenten, zu finden ist der eigentliche Knackpunkt. Um die Entdeckung der Multiplikationsregel zu erleichtern vereinfachen wir das Experiment und untersuchen das Fehlen einer Sechs beim zweimaligen Würfeln. Dabei gelangen wir zum kombinatorischen Zählen aller

Möglichkeiten. Bei diesem Abzählen und bei der Darstellung aller Möglichkeiten mittels eines Baumdiagramms wird es allen bald einmal klar, dass die Möglichkeiten miteinander multipliziert werden müssen, was schließlich auf die Multiplikationsregel bei Wahrscheinlichkeiten führt. Die Erweiterung auf das viermalige Würfeln macht dann keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr. Wir erkennen, dass sich dieses Spiel auf lange Sicht für die Bank, also de Méré, lohnt.

Nun kommt also die nächste Spielidee des de Méré, die aus seinem einfachen, proportionalen Denken stammt und die ihn mit dem Ausspruch "Die Mathematik stimmt nicht mit der realen Welt überein!" zu Pascal eilen lässt. Ausgehend vom Erfolg mit dem viermaligen Würfeln mit einem Würfel bietet er folgendes Spiel an: Würfelt ein Spieler mit zwei Würfeln in 24 Würfen mindestens eine Doppelsechs, so gewinnt die Bank. De Méré hat sich mittels einfachen Proportionen diese Spielregeln ausgedacht und in den Salons aber die Erfahrung machen müssen, dass er damit auf die Dauer zum Verlierer wird. Die Begründung dafür wird nun von den Schülern in einer Gruppenarbeit relativ schnell herausgefunden. Danach wenden sie ebenfalls in Gruppen die Erkenntnis der Multiplikationsregel auf weitere Aufgaben an.

Gemeinsam sammeln wir die gefundenen Regeln und schreiben sie als Theoriebeitrag in unser Heft: Mehrstufige Zufallsexperimente, Baumdiagramm mit Wahrscheinlichkeiten entlang der Äste, Pfadregeln (Additions- und Multiplikationsregel), Ziehen ohne Zurücklegen.

Danach folgt wiederum eine Übungsphase.

IV. Akt: Geschichten rund um den Zufall

Wir wollen anhand von erstaunlichen, überraschenden, ja sogar paradoxen Situationen und Geschichten die Vielfalt der in der Stochastik auftretenden Problemstellungen aufzeigen. Den Anfang machen das berühmte Geburtstagsproblem, das wir gemeinsam diskutieren und das spektakuläre Ziegenproblem, das wir als kleines Fernsehquiz in unserer Spielhölle durchspielen. Barbara gibt die Moderatorin und die SchülerInnen spielen die KandidatInnen. Es macht allen großen Spaß, doch die Vorteile der Strategie des Wechselns werden nicht einfach durchschaut. Weil es schon später Abend ist, werden wir das Ziegenproblem nochmals am nächsten Tag diskutieren.

(Hier folgen zwei Einschübe:

- In herkömmlicher Unterrichtsweise entwickeln wir die Binomialverteilung anhand des Urnenmodells und lösen einige Übungen dazu.
- Wir benutzen die Möglichkeit zu einem Besuch des Spielcasinos in Campione. Dabei ist zu bemerken, dass die Initiative für den Casinobesuch von den SchülerInnen aus gegangen ist. Trotz meiner anfänglichen Bedenken sind absolut keine Einwände seitens der Elternschaft laut geworden. Als Voraussetzungen für den Besuch im Casino gelten das Mindestalter von 18 Jahren, angemessene Kleidung und ein Eintritt von Fr. 15.-, in dem ein Chip im Wert von Fr. 10.- inbegriffen ist. Da alle diese Voraussetzungen von allen SchülerInnen im Voraus akzeptiert worden sind, haben wir den Casinobesuch fest in unser Wochenprogramm eingeplant. Es macht uns großen Spaß und wir machen alle sehr eindrückliche Erfahrungen mit der echten Spielwelt. Am Tag danach werten wir diesen Casinobesuch rechnerisch (Gewinn/Verlust) und prosaisch (Eindrücke/Erfahrungen) aus!)

In Gruppenarbeiten lernen die SchülerInnen weitere Geschichten rund um den Zufall kennen, lösen die darin gestellten Probleme teilweise mit unserer Hilfe und bereiten ihre Präsentation vor. In kurzen Vorträgen werden alle diese Geschichten, ihre Problemstellungen und Lösungen dem ganzen Plenum präsentiert. Diese Geschichten sollen die Vielfalt der stochastischen Probleme aufzeigen und auch den Abschluss dieses Lehrstücks bilden. (Im regulären, kursorischen Unterricht wird die Stochastik weitergeführt: Zufallsvariable, Erwartungswert, Faires Spiel)

Kommentar

Wir dürfen mit dieser Arbeitswoche sehr zufrieden sein. Die Klasse hat in einer sehr intensiven, aber auch angenehmen Atmosphäre gearbeitet. Darüber hinaus hat während der ganzen Woche eine gute, humorvolle Stimmung geherrscht, die das konzentrierte Arbeiten und die guten Ergebnisse vielleicht erst möglich gemacht hat. Diese Einschätzung wird auch von der Klasse geteilt. Die schriftlichen Rückmeldungen der SchülerInnen sind durchwegs positiv ausgefallen. Iris: „Ich wusste nicht, dass Mathe unterhaltsam sein kann!“ Evelyne: „Jetzt gehört eine Mathe-Arbeitswoche zuoberst auf meine Wunschliste.“

Dennoch haben wir uns bei einzelnen Teilen des Stücks schon während dieser Arbeitswoche nicht sonderlich wohl gefühlt. Diskussionen in verschiedenen Kreisen (Seminar an der Uni Marburg, Lehrkunstwerkstatt Gruppe II in Thun) haben diese Gefühle bestätigt und uns gleichzeitig mit Anregungen weitergeholfen. Es sind vor allem zwei Punkte, die wir für das neue Konzept des Stücks berücksichtigen wollen:

- Verbesserung der Dramaturgie
- Vertiefung der Inhalte im historischen und philosophischen Bereich.

In Bezug auf die Dramaturgie sind vor allem die verschiedenen Brüche zwischen den einzelnen Akten zu verbessern, aber auch der 1. Akt mit dem gezinkten Würfel und dem langweiligen Spiel, das sich als Einstieg wirklich schlecht eignet, ist anders zu gestalten. Nachfolgend wird ein kurzer Abriss über das neue Konzept für die Arbeitswoche 98, die wir wiederum durchführen können, aufgezeigt. Es handelt sich dabei um erste Ideen, die in den verbleibenden zwei Monaten weitergedacht und ausformuliert werden sollen. Zusätzlich zu einer weiteren Aufführung im Rahmen der Arbeitswoche 98, die wir mit einer dritten Klasse durchführen werden, werde ich im normalen kursorischen Unterricht das Thema Stochastik in zwei vierten Klassen im Zeitraum September bis Dezember 98 behandeln. Zu einem Höhepunkt der Woche geriet der Besuch im Casino Campione, der vielleicht doch fester Bestandteil des Stücks sein sollte. Die Vorfreude, das ganz spezielle Ambiente und die faszinierende Atmosphäre des Casinos mit den schillernden Spielerfiguren, aber auch der Kitzel des Spielens um Geld und dann die Tage danach waren für alle von uns einzigartige Erfahrungen.

Konzept für weitere Aufführungen

Ouvertüre: Der Spieler: Der Einstieg gefällt, die Stimmung einer Spielhöhle aufzubauen und Person und Werk Dostojewskis einzubauen sind passende Ideen. Gerade letzteres und auch die versuchte Diskussion über Spiel und Spieler als wichtige Phänomene unserer Kulturgeschichte klar vertieft und verbessert werden. Wie wir das erreichen können ist uns aber heute noch nicht ganz klar.

I. Akt: Wir würfeln: Wir sind uns aber klar darüber, dass wir mit einem anderen Spiel in den ersten Akt einsteigen müssen. Es ein Spiel sein, das die Spieler packt, ein Spiel, das den Drang auslöst, das gestellte Problem zu knacken. Wir bringen also als erstes die phantastischen Astragali und animieren die SchülerInnen in Gruppen herauszufinden, was für Spielregeln zu erlassen sind, um beim Werfen eines Astragalos einen Gewinn gerecht zu verteilen. Das führt zur Bestimmung der a-posteriori-Wahrscheinlichkeit mittels der relativen Häufigkeit.

II. Akt: Geschichte der Wahrscheinlichkeit: Nach einem geschichtlichen Abriss der Geschichte der Wahrscheinlichkeit konzentrieren wir uns auf das de Méré-Problem, was uns zur zentralen Frage der mehrstufigen Zufallsexperimente, also auf die Multiplikationsregel führt.

III. Akt: Idealisten und Realisten: In den ersten beiden Akten haben wir somit die Basis für das Streitgespräch von Idealisten vs. Realisten gelegt. Als Symbol für die Idealisten dient der perfekte Würfel und auch das nahezu vollkommene Pyrit. Die Realisten beanspruchen die Astragali (und was noch?) für sich. Es bleibt die Frage nach dem geschickten Vorgehen, aus den Schülern Stellungnahmen für die eine oder andere Anschauung herauszulocken: mittels provokativen Schlagwörtern, sokratischem Gespräch ... ?

IV. Akt: Das Galton-Brett: Lässt sich die Binomial-Verteilung mit Hilfe von Experimenten am Galton-Brett entwickeln? (Aus einer früheren Stochastik-Bastelwoche habe ich zwei solche Bretter, die man allenfalls dazu benutzen könnte. Das ist vorderhand nur eine vage Idee, ich bin mir noch nicht im klaren, darüber wie ich da genau vorzugehen habe und ob es überhaupt zum Ziel führen wird!)

V. Akt: Geschichten rund um den Zufall: Diese interessante Erweiterung und Abrundung des Themas kann im wesentlichen so bestehen bleiben. Auch hier bleibt allerdings die Suche nach weiteren interessanten Geschichten sehr aktuell. In diesem Zusammenhang stellt sich auch die Frage nach dem Platz der Binomialverteilung, da diese in verschiedenen Geschichten gebraucht wird: Soll die Binomialverteilung Teil des Stücks sein, oder als Einschub herkömmlich behandelt werden?

Exkurs: Die zweite und dritte Aufführung: Vierzehn Wochen Stochastik im regulären Unterricht (September – Dezember 98)

Noch vor der zweiten Arbeitswoche in Samedan habe ich versuchsweise im regulären, kursorischen Unterricht mit zwei Parallelklassen, die etwas mehr als ein Jahr vor ihrer Matura stehen, das Stück in der überarbeiteten Fassung aufgeführt.

Die Ouvertüre, der 1. Akt und der Beginn des zweiten Aktes sind recht gut geglückt. In der Mitte des zweiten Aktes wurde der Unterricht wegen Schulpraktikum und Herbstferien für vier Wochen unterbrochen. Es fiel uns allen dann recht schwer, nach dieser Pause, den Faden wieder aufzunehmen, so dass die SchülerInnen sicherlich nicht mehr das Gefühl hatten, bei einer besonderen Unterrichtsform dabei zu sein. Dazu kam das normale schulische Bedürfnis, eine Prüfung zu veranstalten. So dauerte das "Stück" ungefähr von Anfang September bis Weihnachten 1998, also fast vier Monate.

Die vierte Aufführung: Die Engadiner Stochastik-Studienwoche
(November 98)

Gemäß dem vorangehenden Neukonzept und weitergehenden Überlegungen haben wir das Stück ein zweites Mal in einer Arbeitswoche, diesmal in Samedan (22. - 27. November 98) im Engadin, aufgeführt. Wieder ist als Kontrapunkt zur mathematischen Betätigung ein gymnastisch-sportlicher Teil auf dem Programm, den diesmal die SchülerInnen in eigener Regie planen und durchführen. Es folgt ein kurzer Überblick mit anschließendem Kommentar von Barbara Krzensk.

Am Sonntag kommen wir um 18.00 Uhr in Samedan an und haben zu unserem Haus nur einige Minuten zu laufen. Es ist sehr schön, gut geheizt – angenehm bei der klirrenden Kälte, die draußen herrscht - mit Tagesraum, Kaminzimmer, Speisesaal, Tischtennis-Raum und mehr ausgestattet. Der Gymnastikraum ist noch nicht fertiggestellt, aber eine Hälfte des Speisesaals ist sehr gut für Gymnastik geeignet. Wir beziehen die Zimmer und die Küchencrew verschwindet schon in das Untergeschoss, um das Abendessen vorzubereiten.

Ouvertüre

Nach dem Abendessen und Abwaschen treffen wir uns um 21.15 Uhr in der „Spielhöhle". Auf drei Tischen ist jeweils ein Roulette-Spiel aufgebaut. In drei Gruppen versammeln sich die SchülerInnen um die Tische. Am Anfang ist nicht ganz klar, wie gespielt werden soll. Was bedeuten die Bezeichnungen auf dem Tuch, worauf kann gesetzt werden? Wir erklären die verschiedenen Setzmöglichkeiten. Es kommt dann die Frage, welcher Gewinn dabei jeweils ausgezahlt werden . Das wird jedoch von den SchülerInnen ziemlich schnell selbst geklärt. Oder es ist eher so, dass es manchen schnell klar ist und die anderen es einfach so hinnehmen, weil sie schnell spielen wollen. Eine in jeder Gruppe macht den Croupier, die anderen fangen an zu setzen und bald sind alle mit viel Spaß und auch Emotionen dabei.

Etwa nach einer halben Stunde bitten wir die SchülerInnen, sich im Kreis zusammenzusetzen. Rolf liest einen Ausschnitt aus dem Roman „Der Spieler" von Dostojewski vor und erzählt anschließend aus dessen Leben, von der Entstehung und aus dem Inhalt des Romans. Am Ende lesen wir noch einen zweiten Ausschnitt vor und damit endet die Ouvertüre.

Montag: Nach dem Wecken um 7.15 Uhr treffen wir uns um 7.30 Uhr in dem zur Gymnastikhalle umfunktionierten zweiten Teil des Speisesaals. Sabine hat in Absprache mit der Gymnastiklehrerin ein

Frühsport-Programm, bestehend aus Aerobic, Muskeltraining und Stretching, vorbereitet. Danach sind wir wunderbar warm und wach und freuen uns auf das Frühstück.

I. Akt: Würfeln

Um 9.15 Uhr treffen wir uns dann im „Mathi“–Zimmer. Ich stelle mich den SchülerInnen kurz vor und erzähle, warum ich dabei bin. Dann geht es mit dem Unterricht los. Zunächst sollen die SchülerInnen kurz überlegen, was wir gestern abend gemacht haben und es in ihr Heft schreiben.

Als alle damit fertig sind, holt Rolf verschiedene Würfel aus einer Tüte und verteilt einige an die SchülerInnen. Er hat nicht nur die üblichen Spielwürfel dabei, sondern auch 8- 12- und 24-flächige Würfel und auch einen gezinkten, der fast immer auf die 6 fällt. Als Würfel hat er auch zwei Schweinchen dabei, von dem Spiel „Schweinerei“, bei dem mit Schweinen gewürfelt wird. Dann stellt Rolf der Klasse Astragali vor, Schafsknochen, mit denen schon im Altertum gewürfelt wurde. Die Astragali werden herumgereicht, so dass sich alle einen genauer anschauen können. Wir stellen fest, dass es 4 Seiten gibt, auf die der Astragalus fallen kann. Eine Schmalseite, die ein bisschen wie ein Ohr aussieht, wollen wir Öhrchen nennen. Rolf fragt nun: „Wie kann man mit so einem Ding spielen? Beim Roulette gestern war klar: Hat man einen Franken auf rot gesetzt, dann bekommt man bei einem Gewinn 2 Franken. Was soll man bekommen, wenn man einen Franken auf Öhrchen gesetzt hat und gewinnt?“ Jemand schlägt vor, dann 4 Franken auszuzahlen, weil der Astragalus 4 Seiten hat. Rolf fragt daraufhin: „Und wenn man auf eine Breitseite gesetzt hat, bekommt man dann auch 4 Franken?“ Eine Schülerin meint: „Es gibt 4 Seiten, jede Seite hat aber nicht die Chance 1 zu 4. Beim Öhrchen müsste der Gewinn größer sein, da die Chance geringer ist.“ Nun ist die Frage, wie man herausfinden kann, wie groß die Chance ist, beim Astragalus ein Öhrchen zu werfen. Susann schlägt vor: „Wir könnten in Gruppen würfeln und aufschreiben, wie oft das Öhrchen kommt. Eine Statistik machen.“ Der Vorschlag wird angenommen. Die SchülerInnen sollen nun in Zweiergruppen jeweils 100 Würfe machen und dabei aufschreiben, wie oft das Öhrchen fällt.

Nachdem alle gewürfelt haben, vergleichen wir die Ergebnisse. Bei Sabine war 5 mal das Öhrchen gefallen. Es wird nun kurz die Frage diskutiert, ob die Chance für ein Öhrchen 5 zu 95 oder 5 zu 100 ist. Die SchülerInnen einigen sich, dass 5 zu 100 richtig ist, weil insgesamt 100 mal gewürfelt wurde. Eine andere Gruppe hat ein Ergebnis von 15 Öhrchen. Nun ist die Frage: Was stimmt jetzt? Was machen wir? Eine Schülerin meint, je mehr gewürfelt würde, desto genauer werde es. Man müsse alle Würfe und alle Ergebnisse zusammenzählen. Rolf hatte dafür ein Arbeitsblatt vorbereitet, das wir nun gemeinsam ausfüllen. Da werden jeweils nach 100 Würfen die bisherigen Werte addiert und daraus die relativen Häufigkeiten, d.h. das Verhältnis von Öhrchen zur Gesamtzahl der Würfe berechnet. Man sieht sehr schön, dass die relativen Häufigkeiten sich bei einem Wert einpendeln. Wir erhalten bei 1200Würfen eine relative Häufigkeit von 11,1% für das Öhrchen. Wir klären dann noch einmal, was

der Begriff relative Häufigkeit genau bedeutet. Dann stellt Rolf die Frage: „Ist das jetzt die Wahrheit?“ Eine Schülerin sagt: „So ungefähr. Es könnte auch 11 % sein. Eine andere meint, es könnte auch Glück dabei gewesen sein, es könnte auch eine andere Zahl sein. Die SchülerInnen meinen, man könne noch eine Runde werfen, um sicherer zu werden, aber es würde dabei auch nicht viel anderes herauskommen.

Simon hat nun den Einwand, dass doch nicht alle Knochen gleich seien, sie würden doch etwas unterschiedlich aussehen. Das wird von Rolf bestätigt. Eigentlich müssten alle Würfe mit dem gleichen Knochen durchgeführt werden. Das sei aber ein organisatorisches Problem, deshalb hätten wir die kleine Ungenauigkeit in Kauf genommen. Anschließend stellen wir die relativen Häufigkeiten graphisch dar, was ihr Stabilisieren anschaulich werden lässt. Eine Schülerin meint: „Ich verstehe nicht, dass fast alle Zahlen über dem Schnitt liegen, Das will nicht in meinen Kopf.“ Darauf erwidert eine andere: „Das liegt daran, dass wir mit den hohen Zahlen begonnen haben.“ Rolf bestätigt es: „Wenn wir mit den kleinen Zahlen begonnen hätten, würde es bei 5% anfangen, dann auf 10% hochgehen und sich von unten annähern. Was können wir sehen?“ Eine Schülerin sagt, dass sich die relativen Häufigkeiten auf einen bestimmten Wert einpendeln, wenn immer mehr gewürfelt wird. Wir stellen fest, dass man die relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit nehmen kann.

Hier führt Rolf nun die Begriffe der a-priori- und a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten ein. Von a-priori- oder klassischer Wahrscheinlichkeit spricht man, wenn man schon im voraus sagen kann, wie groß die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis ist, wie zum Beispiel bei einem guten Würfel, beim Roulette, Spielkarten, Lotto. Wenn man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nur durch statistische Untersuchungen herausbekommen kann, spricht man von einer a-posteriori- oder statistischen Wahrscheinlichkeit, wie beim Astragali-, Reißnagel- oder Schweinchen-Werfen. Rolf erzählt kurz von Jakob Bernoulli, auf den der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit zurückgeht. (Interessant ist Rolfs Bemerkung, dass es im letzten Matur-Jahrgang an dieser Schule eine direkte Nachfahrin dieser Familie gab.) Wir formulieren das Empirische Gesetz der Großen Zahlen:

- Nach einer hinreichend großen Anzahl von Versuchen pendeln sich die relativen Häufigkeiten bei einem festen Wert ein. – An dieser Stelle machen wir nun eine halbe Stunde Pause.

Nach der Pause geht Rolf auf die a-priori-Wahrscheinlichkeiten ein. Er sagt, dass sie auch als klassische Wahrscheinlichkeit bezeichnet wird und dass Laplace eine Formel dafür entwickelt hat. Wir über

legen uns noch einmal, wie wir die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu würfeln, berechnen. Die Wahrscheinlichkeit für eine gerade Zahl ist 3/6, weil es 3 Fälle gibt, die günstig sind für das, was wir

wollen: 2, 4, 6 und weil es 6 Fälle gibt, die überhaupt möglich sind. Auf die Frage, wie man das allgemein formulieren könnte, antwortet Annina: „Anzahl günstige Möglichkeiten dividiert durch Anzahl mögliche Möglichkeiten." Rolf schreibt die Laplace-Formel an die Tafel:

- Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses E ist gleich der Anzahl günstiger Fälle dividiert durch die Anzahl möglicher Fälle.

Anschließend stellt er den SchülerInnen folgendes Problem: Leibniz glaubte, dass beim Werfen zweier Würfel Augensumme 11 und 12 gleichwahrscheinlich sind. Stimmt das? Wir wollen es experimentell überprüfen. In Zweiergruppen wird wieder 100 mal gewürfelt und notiert, wie oft Augensumme 11 und 12 aufgetreten sind. Wir bilden anschließend wieder die Summen und daraus die relativen Häufigkeiten. Wir erhalten für Augensumme 11 eine relative Häufigkeit von 4,6% und für Augensumme 12 eine relative Häufigkeit von 3,1%. Nun stellt Annina die Frage, ob Leibniz mit zwei gleichen oder zwei unterscheidbaren Würfeln gewürfelt habe. Annina glaubt der Aussage Leibniz' nicht und glaubt, dass es etwas mit der Würfelfarbe zu tun haben könnte Nach einer kurzen Diskussion kommen die SchülerInnen zu dem Ergebnis, dass es damit nichts zu tun haben kann. Tina meint: „Der erste Würfel hat 2 Möglichkeiten, er kann 5 oder 6 sein. Der zweite hat nur eine Möglichkeit. Bei 12 haben beide nur eine Möglichkeit. Also muss 11 eine größere Wahrscheinlichkeit haben." Sandy meint: Der erste Würfel hat 1/6 Chance, der zweite hat 1/6. Also insgesamt 1/6 + 1/6 ?" Darauf meint Rolf: „Da möchte ich Ihnen nicht helfen. Rechnen Sie nicht mit Wahrscheinlichkeiten, sondern schauen Sie nach günstigen und möglichen Fällen." Da ein bisschen Ratlosigkeit herrscht, wird beschlossen, noch eine Serie zu würfeln. Danach haben wir die Ergebnisse 5% für 11, 3,1% für 12. Klar ist, dass 11 und 12 nicht gleich häufig vorkommen. Aber wie ist nun die theoretische Wahrscheinlichkeit für diese Ereignisse?

Wir überlegen nun, wie viele Möglichkeiten es gibt beim Werfen mit zwei Würfeln. Es gibt den Vorschlag: 36 Fälle. Weitere Vorschläge werden nicht gemacht, aber so ganz klar scheint es auch nicht zu sein. Zwei Schülerinnen schreiben nun mit roter und grüner Kreide alle möglichen Kombinationen der Ergebnisse eines roten und grünen Würfels an die Tafel. Dabei sind sie kurz unsicher, ob sie wirklich zwischen (1,2) und (2,1) unterscheiden müssen. Anschließend ist folgendes an der Tafel:

11 12 13 14 15 16
21 22 23 24 25 26
31 32 33 34 35 36
41 42 43 44 45 46
51 52 53 54 55 56
61 62 63 64 65 66

Nun ist klar: Die Wahrscheinlichkeit für Augensumme 11 beträgt 2/36 = 5,6% , da 36 mögliche Fälle existieren und 2 davon zum Ergebnis 11 führen, entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für Augensumme 12 gleich 1/36 = 2,8%.

Ähnliche Überlegungen stellen wir an beim Betrachten des Experiments „Werfen zweier Münzen“. Anschließend besprechen wir einige allgemeine Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit und gehen noch einmal auf den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit ein. Wir sprechen über den Satz: „Der Würfel hat kein Gedächtnis.“ und erinnern uns an die Zitate aus dem Spieler. Anschließend wird die Aufgabensammlung ausgeteilt und bis zur Mittagspause werden die Aufgaben von Teil I bearbeitet.

Nach einer längeren Mittagspause treffen wir uns wieder um 15.45 Uhr und erinnern uns noch einmal an die Ausgangsfrage, als wir mit den Astragali gewürfelt hatten. Wir hatten ja wissen wollen, wie hoch der Gewinn bei einem Franken Einsatz beim Werfen eines Öhrchens sein müsste. Sibylle sagt, der Gewinn müsste 9 Franken betragen, da die Wahrscheinlichkeit für ein Öhrchen 11,1% bzw. 1/9 betrug. Deshalb müsse der Gewinn das neunfache betragen.

II. Akt: Zur Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Rolf gibt einen Überblick über die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Er berichtet, dass in der Antike keine Wahrscheinlichkeitsrechnung betrieben wurde. Der Zufall wurde als etwas Göttliches betrachtet, der Ausfall eines Astragalus-Wurfs ergab einen Orakelspruch, somit hat man die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Ausfälle nicht hinterfragt. Der Zufall war in den Händen der Götter. Auch Kombinatorik war unbekannt. Er geht dann noch kurz auf die unterschiedliche Interpretation des Begriffs Wahrscheinlichkeit („eikos“) bei Platon und Aristoteles ein. Für Platon war etwas wahrscheinlich, wenn es einen hohen Grad des Vertrauens genießt. Aristoteles bezeichnete etwas als wahrscheinlich, wenn es häufig vorkommt. An statistischen Erhebungen gab es in der Antike bereits Volkszählungen. Auch im Mittelalter beschäftigte man sich noch nicht mit Wahrscheinlichkeitsrechnung. Pacioli hat Ende des 15. Jahrhunderts das berühmte Teilungsproblem formuliert, das lange ungelöst war. (Ein Spiel muss bei einem Zwischenstand abgebrochen werden. Wie ist der Gewinn gerecht auf die beiden Spieler zu verteilen?) Auch Galilei, der ein Buch über Würfelspiele geschrieben und sich mit Kombinatorik beschäftigt hat, hat dieses Problem nicht richtig gelöst. Als „Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ bezeichnet man das Jahr 1654, in dem Pascal und Fermat einen Briefwechsel über das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten geführt haben. Auslöser war eine Frage von Chevalier de Méré, einem Lebemann und Spieler, der sich empört an Pascal wandte, warum die Mathematik nicht mit der Realität übereinstimme.

Hier steigen wir nun mit den SchülerInnen in die Überlegungen ein. Rolf formuliert zunächst an der Tafel

Das erste Problem des Chevalier de Méré: Ein Spieler wirft 4 mal einen Würfel. Hat er in diesen 4 Würfen keine 6, so gewinnt der Spieler. Sonst gewinnt die Bank (de Méré). Warum lohnt sich das Spiel für den Chevalier?

Die SchülerInnen sollen zu zweit überlegen, darüber diskutieren. Viele kommen auf die Idee, die Wahrscheinlichkeiten für eine 6 zu addieren, und vermuten, die Wahrscheinlichkeit, dass der Chevalier gewinnt, sei 4/6. Dann bekommen sie Zweifel, weil dann bei 7 Würfen eine Wahrscheinlichkeit größer als 1 herauskäme, und das kann ja nicht sein. Andere nehmen einen Würfel und probieren es aus. Es herrscht eine ziemliche Ratlosigkeit. Rolf gibt ihnen nun den Tipp, das Problem zu vereinfachen und mit weniger Würfen zu beginnen. Um bei einem Wurf keine 6 zu haben, hat der Spieler 5 Möglichkeiten, 6 Möglichkeiten gibt es insgesamt. Das ist klar. Wie sieht das nun bei 2 Würfen aus? Wieviel Möglichkeiten gibt es, bei zwei Würfen keine 6 zu würfeln? Wir haben noch das Bild aller Möglichkeiten beim zweimaligen Würfeln an der Tafel. Da erkennt man: Die Möglichkeiten, bei zwei Würfen keine 6 zu erhalten, sind 25, nämlich 5 für den einen, multipliziert mit den 5 Fällen für den zweiten Wurf. Die möglichen Fälle sind 36, die Wahrscheinlichkeit, in zwei Würfen keine 6 zu erhalten also 25/36. Das erweitern wir nun auf drei und vier Würfe und erhalten: P(„in 4 Würfen keine 6“) = 625/1296 = 48,2%. Es wird kurz diskutiert, dass die Gewinnchancen für de Méré nicht sehr groß sind. Andererseits ist das Spiel dadurch auch für die Mitspieler interessant, so dass sie gerne mitspielen, auf lange Sicht hat de Méré jedoch einen Gewinn.

De Méré hat sich nun zur Abwechslung eine Variante ausgedacht. Er wollte die Spieler mit 2 Würfeln werfen lassen. Da es dabei 6 mal mehr Möglichkeiten gibt, wollte er die Spieler auch 6 mal mehr würfeln lassen. Wir formulieren

Das zweite Problem des Chevalier de Méré: Ein Spieler wirft 24 mal mit 2 Würfeln. Hat er in diesen 24 Würfen keine Doppelsechs, so gewinnt der Spieler, sonst gewinnt die Bank. Die SchülerInnen erhalten die Aufgabe, dieses Problem zu lösen, was ihnen schnell gelingt. Wir schreiben an die Tafel:

- Ein Wurf keine Doppelsechs: g = 35, m = 36 (g: günstige Fälle, m: mögliche Fälle)
- 2 Würfe keine Dopplesechs: g = 352, m = 362

Hier hakt Rolf noch einmal nach: „Das ist der Knackpunkt des Ganzen. Warum gibt es im 2. Wurf 35^2 bzw. 36^2 Fälle?“ Die SchülerInnen erklären es schlüssig.
Insgesamt erhalten wir also:

- In 24 Würfen keine Doppelsechs: $g = 35^{24}$, $m = 36^{24}$
- P(„in 24 Würfen keine Doppelsechs“) = $35^{24}/36^{24}$ = 50,86%

Rolf sagt dazu, man sehe hier, dass das proportionale Denken bei Wahrscheinlichkeiten versagt.

Nun gehen wir auf die Wahrscheinlichkeiten ein und sehen, dass sich nicht nur die Möglichkeiten, sondern auch die Wahrscheinlichkeiten multiplizieren.

- P(„in 4 Würfen keine 6“) = 5/6*5/6*5/6*5/6

Beim mehrmaligen Werfen *multiplizieren* wir die Wahrscheinlichkeiten miteinander.
Anschließend rechnen wir aus, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, beim dreimaligen Astragaluswurf drei mal ein Öhrchen zu erhalten.

- P(1 Wurf 1 Öhrchen) = 1/9
- P(in 3 Würfen 3 Öhrchen) = 1/9*1/9*1/9 = 0,14%

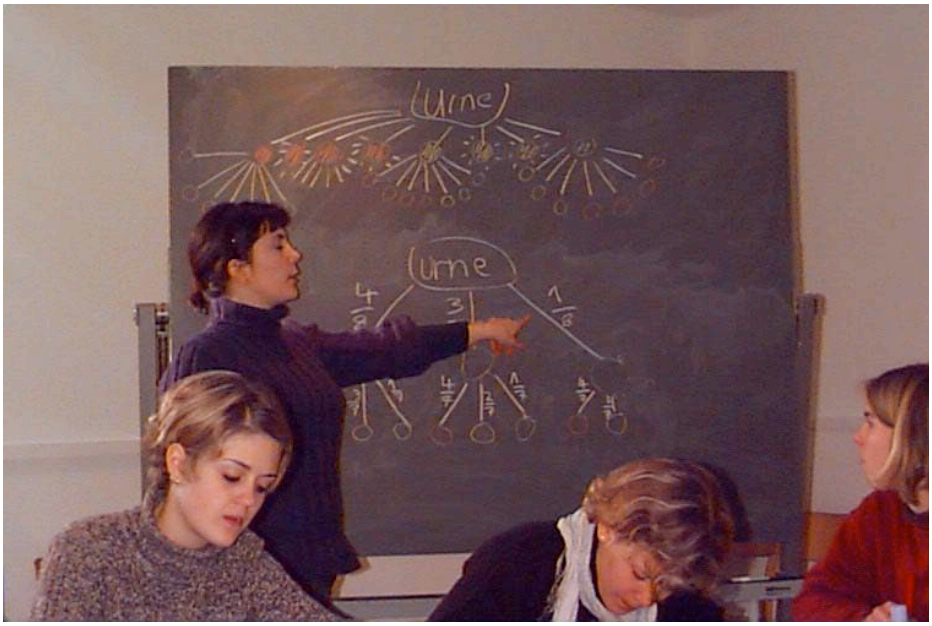
Hier überlegen wir, wie man das aufzeichnen könnte. Zum Beispiel das zweimalige Werfen einer Münze. Sabine schlägt ein Baumdiagramm vor und zeichnet es an die Tafel. Wir stellen fest: Die Wahrscheinlichkeiten entlang eines Astes werden multipliziert.

Hier endet der Unterricht für den ersten Tag. Wir ziehen uns um und treffen uns wieder im Speisesaal zur abendlichen Gymnastik. Erst machen wir ein Aufwärm-Programm und zum Ende folgt eine lange Entspannungsphase, die uns nach so viel Mathematik richtig gut tut. Danach gibt es ein wunderbares Abendessen und einen wohlverdienten freien Abend.

Am Dienstag treffen wir uns nach Morgengymnastik und Frühstück wieder um 9.15 Uhr im Mathe-Zimmer. Wir erinnern uns an die beiden Spiele des de Méré und wiederholen die Lösung. Wir sprechen darüber, wie die Verwunderung de Méré's darüber, bei dem zweiten Spiel auf lange Sicht zu verlieren, während er beim ersten gewonnen hatte, dazu führte, dass Pascal sich mit Glücksspielen beschäftigte und dabei sozusagen die Wahrscheinlichkeitsrechnung erfand.

Rolf erzählt dann noch von Jakob Bernoulli, von dem wir auch gestern schon gehört hatten. Er wurde im Jahr 1654 geboren und schrieb ein Buch mit dem Titel „Ars Conjectandi" zur Kunst des Vermutens, das aber erst nach seinem Tod veröffentlicht wurde. Er hat in diesem Buch den Bereich des Glücksspiels verlassen und auch auf andere Gebiete wie z.B. Politik ausgedehnt. Von Simon de Laplace (1749 bis 1827) stammt die Formel zur klassischen Wahrscheinlichkeit, die wir auch gestern schon formuliert hatten. Erst im Jahr 1933 wurde von Kolmogoroff ein Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt, das nicht erklärt, was Wahrscheinlichkeiten sind, sondern welche Eigenschaften eine Funktion haben muss, damit sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

Nach einer Wiederholung, warum sich bei mehrstufigen Zufallsexperimenten die Wahrscheinlichkeiten multiplizieren – die SchülerInnen erklären das sehr gut – werden Arbeitsblätter zu mehrstufigen Zufallsexperimenten bearbeitet, bei denen es um Baumdiagramme und Pfadregeln geht. Wir lesen den ersten Text auf dem Arbeitsblatt zusammen und erklären die Begriffe: Was ist ein Zufallsexperiment, die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf jeder Stufe, der Ergebnisraum des zusammengesetzten Experiments. Wir merken, dass das Arbeitsblatt noch zu viele Fachausdrücke enthält, das müsste das nächste Mal einfacher formuliert werden. Zu dem angegeben Beispiel, wo aus einer Urne mit 4 roten, 3 schwarzen und 1 grünen Kugel nacheinander ohne Zurücklegen je eine Kugel gezogen werden soll, zeichnet Sabine einen Baum an die Tafel, für jede Kugel in der Urne zeichnet sie einen eigenen Ast, so dass es ziemlich unübersichtlich wird. Susann meint, das könne man einfacher machen und macht einen anderen Vorschlag. Sie zeichnet für den ersten Zug drei Äste, einen für rot, einen für schwarz und einen für grün. Beim zweiten Versuch lässt sie es bei einem Ast für jede Kugel. Dazu kommt von einer Schülerin der Einwand: „Du hast nicht berücksichtigt, dass rot wahrscheinlicher ist als grün." Auf die Frage, wie man das beheben könne, meint Tabea, man könne die Wahrscheinlichkeiten an die Äste schreiben. Sie macht es an der Tafel und meint dann, man könne dann aber den 2.Versuch auch vereinfachen. Wir haben anschließend folgendes Bild:



Sibylle liest weiter von dem Arbeitsblatt vor bis zur ersten Pfadregel, die von einer Schülerin an der Tafel am Baum erläutert wird. Anschließend bearbeiten die SchülerInnen das Arbeitsblatt selbständig weiter. Nach einer Pause werden weitere Aufgaben aus der Aufgabensammlung bearbeitet.

Auch am Nachmittag schließt sich noch eine Übungsphase von einer Stunde an, damit die Pfadregeln und das Veranschaulichen mit Hilfe von Bäumen sich festigen können.

III. Akt: Und wenn die Bäume in den Himmel wachsen?

Wir haben zwei Galton-Bretter mitgebracht, die wir nun den SchülerInnen zeigen. Auf einem Galton-Brett befinden sich mehrere Nagelreihen, von denen jede Reihe einen Nagel mehr enthält. Es beginnt mit einem Nagel, darunter versetzt zwei Nägel, dann drei usw. Wie verteilen sich die Kugeln, wenn wir sie herunterlassen? Es gibt die beiden Meinungen: „In der Mitte mehr, außen weniger." „Gleichviel."

Damaris will begründen, warum am Rand am wenigsten sind, kommt aber beim Erklären durcheinander und lässt sich von den anderen davon abbringen. Christine meint, es müssten in der Mitte mehr sein, weil es da mehr Möglichkeiten gibt. Dagegen meint jemand: „Es ist aber doch überall 50%, also gleich." Eine andere meint: „Es hat in der Mitte mehr, weil es mehr verschiedene Möglichkeiten für die Mitte gibt. Es gibt mehr Wege, die in die Mitte führen. Nach außen gibt es nur einen Weg." Nina meint, man könnte Fäden spannen, für jeden Weg, den es gibt. Sie sagt: „Nach außen gibt es nur einen Weg." Sie zeigt es mit einer Kugel, wie sie laufen müsste, um nach außen zu gelangen, und dass es auf vielen verschiedenen Wegen möglich ist, in die Mitte zu gelangen. Einigen fällt jetzt ein, dass sie das Galton-Brett schon in der 1. Klasse (das entspricht der 9. bei uns) besprochen hatten. Wir verzichten daher auf die Versuchsreihe, die wir vorhatten, und geben das Arbeitsblatt dazu aus. Die SchülerInnen werden aufgefordert, die ersten fünf Aufgaben zu bearbeiten. Da meint Tina: „Oh, könnten Sie uns nicht lieber eine Geschichte erzählen?" Aber sie machen sich an die Arbeit. Zum Teil ist es sehr mühsam. Sie kennen die Binomialkoeffizienten, es ist aber trotzdem schwierig, das alles zusammenzubringen.

Um 18.30 Uhr treffen wir uns wieder zur Gymnastik. Diesmal machen zwei Schülerinnen Hip-Hop mit uns, was unsere Konzentrationsfähigkeit auf eine andere Art und Weise fordert. Damit haben nun Lehrer und Studentin mehr Mühe als die SchülerInnen.

Zwischenspiel

Das Ziegenproblem: An diesem Abend treffen wir uns nach dem Abendessen um 20.45 Uhr in der Spielhöhle zu einer spielerischen Mathematikstunde. Alle sind müde und haben auf Mathe keine Lust. Auf dem Boden liegen die Gymnastikmatten, auf einem Tisch stehen drei umgedrehte Schüsseln mit den Nummern 1 bis 3. Ich begrüße die Anwesenden und sage, sie sollten sich vorstellen, ich sei ein Fernsehmoderator und sie das Publikum einer Spielshow. Ich stelle ihnen meine Assistentin – Rolf – vor. Sie lachen, als er mit zum Röckchen vorgebundenen Pullover knickst und lächelt. Langsam kommt eine bessere Stimmung auf. Ich brauche nun drei Kandidaten, und stelle ein Auto als Hauptgewinn in Aussicht. Die Kandidatinnen stellen sich mit Phantasienamen, Berufen, Hobbies vor und bekommen eine Quizfrage gestellt. Wer die Frage richtig beantwortet hat, darf eine Schüssel wählen. Die Assistentin deckt dann eine der anderen Schüsseln auf, unter der eine Stoffziege zum Vorschein kommt. (Die Schülerinnen klären mich nachher auf, dass es keine Ziegen sondern Gemsen sind. Nun ja, ich bin halt Deutsche...) Ich frage nun die Kandidatin, ob sie bei ihrer Wahl bleiben möchte oder lieber die andere Schüssel wählen möchte. Sie bleibt bei ihrer ersten Wahl und verliert leider. Wir spielen das Spiel noch viele Male. Die Vorstellungen der einzelnen Kandidaten werden immer witziger, und auch die Quizfragen sind nicht immer ganz ernsthaft. Leider gewinnt niemand ein Auto. Nach einigen Spielen glauben die SchülerInnen, wir hätten gar kein Auto, sondern nur Ziegen unter den Schüsseln. Daraufhin zeigen wir am Ende immer noch als Beweis das Auto unter der dritten Schüssel.

Irgendwann beenden wir das Spiel, ich teile die mitgebrachten Schoko-Autos aus und stelle die Frage: „Was ist günstiger: Sollte man bei der einmal getroffenen Wahl bleiben oder lieber wechseln?“ Alle sind der Meinung, dass es egal ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass unter einer der verbleibenden Schüsseln das Auto ist, sei doch in beiden Fällen gleich ½. Sie sehen da überhaupt kein Problem und ich sehe an ihren Gesichtern, dass sie sich etwas wundern, warum ich so etwas überhaupt frage. Ich erzähle dann, dass Marilyn vos Savant, die Frau mit dem höchsten bekannten Intelligenzquotienten, vor einigen Jahren viele Leute, darunter auch viele Mathematiker, in Aufregung versetzt hat mit der Behauptung, es sei günstiger zu wechseln. Die SchülerInnen wollen ihre Begründung wissen, aber ich sage, das sollten sie selbst herausfinden. Hat Frau vos Savant recht mit ihrer Behauptung? Zunächst sind alle etwas ratlos. Sie schauen sich die Schüsseln mit den Ziegen und dem Auto an und überlegen. Sollen wir es vielleicht noch öfter spielen? Da ist es Christine auf einmal klar. Sie versucht den anderen zu erklären, dass man beim Wechseln immer dann gewinnt, wenn man beim ersten Mal auf einer Ziege gelandet ist und nur dann verliert, wenn man vorher die Schüssel mit dem Auto gewählt hatte. Da es zwei Ziegen, aber nur ein Auto gibt, sei die Gewinnchance beim Wechseln 2/3. Bleibt man dagegen bei seiner Entscheidung, so gewinne man nur mit der Wahrscheinlichkeit 1/3. Einige verstehen, was sie meint, haben aber Schwierigkeiten, es den anderen zu erklären. Also stellen wir uns zu den Schüsseln, legen Ziegen und Autos davor und gehen alle Möglichkeiten durch. Es wird durch das Anschauen ganz einleuchtend.

Rolf und ich waren erstaunt, dass die SchülerInnen die Lösung gefunden haben, ohne dass wir nochmals mit vorbereiteten Zetteln das Spiel in Gruppen simuliert haben. Ja, dass sie nach so einem anstrengenden Tag voll Mathematik überhaupt noch so viel Energie aufbrachten, darüber ernsthaft nachzudenken. Im letzten Jahr mit einer anderen Gruppe war an dieser Stelle keine Motivation vorhanden, sich damit auseinanderzusetzen.

Am Mittwoch im Unterricht sollen die SchülerInnen dann kurz etwas über den gestrigen Abend aufschreiben. Zwei Schülerinnen lesen ihre Variante vor. Cécile wundert sich, dass so viele Leute Frau Savant nicht geglaubt haben. Wenn man es so aufschreibe, sei es doch ganz einfach zu verstehen. Wir weisen darauf hin, dass wir es uns aber vorher anschaulich gemacht haben, und da sei es leichter zu verstehen. Trotzdem ist es etwas verwunderlich, dass es einen solchen Aufruhr gegeben hat.
Nun wiederholen wir die Ergebnisse vom vorigen Nachmittag zum Galton-Brett. Am Beispiel des zweiten Behälters überlegen wir, was wir kennen müssen, um die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel im zweiten Behälter landet, berechnen zu können.

1. Anzahl der Wege in Nr. 2
2. Wahrscheinlichkeit für einen solchen Weg

Um in den 2. Behälter zu gelangen, muss die Kugel zwei mal rechts und die anderen Male links laufen. Es gibt also $\binom{6}{2} = 15$ Möglichkeiten, da von den 6 Plätzen zwei ausgewählt werden müssen, an denen die Kugel nach rechts läuft. Tina sagt, dass sie nicht ganz versteht, warum man das so machen muss. Sandra erklärt es ihr: „6 tief 2 heißt doch 6!/4!2!. 6! Möglichkeiten gäbe es, wenn alle r und l verschieden wären. Wir müssen jetzt noch durch 2! und 4! Teilen, weil wir die 4 l und 2 r nicht unterscheiden.“ Tina sagt nun: „Ich dachte, 6 tief 2 sei 6*5/2*1 ? Rolf zeigt an der Tafel, dass beide

Ausdrücke gleich sind. Brigitte sagt: „Man kann es auch so sehen: 6 tief 2 ist die Anzahl der Möglichkeiten, 2 aus 6 auszuwählen. Die Kugel wählt 2 r von den 6 Nägeln aus.“
Das haben nun alle verstanden. Nun kommt das 2. Problem: Hat jeder Weg die gleiche Wahrscheinlichkeit? Ja, da sind alle einverstanden. Die Wege sind alle gleichwahrscheinlich und die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Weg ist $(1/2)^6$, da die Kugel sich sechs mal mit der Wahrscheinlichkeit ½ für eine der möglichen Richtungen entscheidet. Wir erhalten also als Resultat:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel in Behälter zwei fällt, ist $\binom{6}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^6$. Die SchülerInnen erklären noch einmal, was diese Zahlen bedeuten und warum es so richtig sein muss. Anschließend berechnen wir die Wahrscheinlichkeit für Behälter drei, danach allgemein für Behälter k. Danach verallgemeinern wir es auf n Nagelreihen.

Nun wollen wir uns vorstellen, dass die Kugel bei jedem Nagel nicht mit der Wahrscheinlichkeit ½ nach rechts und links fällt, sondern mit 0,7 nach rechts und 0,3 nach links. Was ändert sich nun? Klar, die Anzahl der Wege ändert sich nicht. Es ändert sich die Wahrscheinlichkeit für einen Weg. Rolf zeichnet verschiedenfarbige Wege in Behälter 2 und wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten. Wir erhalten $0{,}3^4 * 0{,}7^2$ für alle Wege, da die Kugel jeweils 4 mal nach links und 2 mal nach rechts laufen muss. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel im 2. Behälter landet gleich $\binom{6}{2} * 0{,}3^4 * 0{,}7^2$

Nun führen wir das noch an einigen Beispielen durch und erhalten als Verallgemeinerung die Formel für die Binomialverteilung. Hier haben sich alle eine Pause verdient.
Nach der Pause wenden wir die Ergebnisse vom „abnormalen Galton-Brett“ auf allgemeine Probleme an, wo mehrmals hintereinander unabhängig der gleiche Versuch durchgeführt wird, bei dem es nur auf Treffer oder Nicht-Treffer ankommt. Als Beispiel betrachten wir rot-grün-blinde Männer. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann rot-grün-blind (RGB) ist, beträgt 8%. Wir untersuchen zufällig 5 auf der Straße angetroffene Männer auf RGB. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau einen RGB-Mann zu finden? Die SchülerInnen ziehen Parallelen zum Galton-Brett und kommen so schnell auf die Lösung. Als weiteres Beispiel berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass von 17 befragten Männern genau 3 RGB sind. Anschließend schreiben wir nach auf, in welchen Fällen man die Binomialverteilung anwenden darf:

1. In jedem Versuch darf es nur zwei Ergebnisse geben.
2. Die Wahrscheinlichkeit bleibt in jedem Versuch gleich.

Danach rechnen die SchülerInnen selbständig, zum Teil mit unserer Hilfe, Aufgaben zur Binomialverteilung aus der Aufgabensammlung.

An diesem Nachmittag findet kein Mathe-Unterricht statt. Der Nachmittag und Abend ist für alle zur freien Verfügung.

Donnerstag: Nun ist schon der größte Teil der Stochastik-Woche geschafft. An diesem Morgen ist zum letzten Mal Morgengymnastik, von Sabine wie immer perfekt vorbereitet und angeleitet.

Im Mathe-Unterricht am Vormittag sollen die SchülerInnen zunächst noch etwa eine Stunde Aufgaben zur Binomailverteilung bearbeiten. Die Arbeitsatmosphäre ist wie immer in diesen Übungsphasen sehr gut. Bei Bedarf besprechen sie sich mit den Nachbarn oder rufen uns zu Hilfe, falls sie an einer Stelle nicht weiterkommen.

IV.Akt: Geschichten rund um den Zufall

Um 10.30 Uhr stellt Rolf dann die Themen für die Gruppenarbeiten kurz vor. Anschließend wählen sich die SchülerInnen zu den einzelnen Themen in die Gruppen ein. Nach einer Pause haben sie dann knapp 2 1/2 Stunden Zeit, das Thema zu bearbeiten und den Vortrag vor der Klasse vorzubereiten. Dabei können sie sich an einen beliebigen Platz im Haus zurückziehen, für Fragen stehen Rolf und ich im Mathe-Zimmer zur Verfügung.

Für den Nachmittag hat Rolf die Turnhalle in der Mittelschule des Ortes reserviert. Von 15.00 Uhr bis 17.00 Uhr ist Gelegenheit, in der Turnhalle Volleyball oder anderes zu spielen.

Um 17.40 Uhr sind wir wieder zur Mathematik versammelt und hören an diesem Nachmittag die beiden ersten Vorträge.

1. Thema: Das Rosinenproblem: Wie viele Rosinen ein Bäcker mindestens in 500 g Teig geben, damit mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit in jedem Brötchen mindestens eine Rosine enthalten ist? Die SchülerInnen geben eine anschauliche und nachvollziehbare Lösung dieser und einer verwandten Aufgabe und haben sich noch zwei Beispiele einer solchen Drei-Mindestens-Aufgabe ausgedacht. Die zweite stellen sie der Klasse als Aufgabe:

Bei einer Hochzeit sind 12 Kinder anwesend. Es werden Feuersteine aufgeworfen und die Kinder sammeln sie auf. Wie viele Feuersteine müssen mindestens geworfen werden, damit alle Kinder mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit mindestens einen Feuerstein bekommen?

2. Thema: Die vertauschten Briefe: Unbesehen werden drei Briefe in drei vorbereitete Umschläge gesteckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist kein Brief im richtigen Umschlag, sind alle Briefe im richtigen Umschlag? Dieses Problem soll auch auf den Fall mit vier Briefen und allgemein auf n Briefe ausgedehnt werden.

Die Gruppe hat drei Briefumschläge und drei Briefe dabei, jeweils mit den Nummern 1, 2 und 3. Sie lassen von einigen Mitschülerinnen drei mal den Versuch durchführen, die Briefe jeweils zu mischen und beliebig in die Umschläge zu stecken. Die Ergebnisse, d.h. welcher Brief in welchem Umschlag gelandet ist, werden an der Tafel notiert. Die Frage war, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem der Umschläge der falsche Brief steckt? Und wie groß, dass in jedem der richtige ist? Die Schülerinnen erläutern das mit Hilfe eines Baumdiagramms. Für das gleiche Problem mit vier Briefen haben sie zur Veranschaulichung einen „Würfel“ mit vier Seiten, einen Tetraeder, gebastelt. Die unten liegende Seite soll die gewürfelte sein. Sie lassen nun ihre MitschülerInnen je vier mal würfeln und notieren die Ergebnisse im ersten bis vierten Wurf. Die Spieler haben gewonnen, wenn die gewürfelte Zahl nicht mit der Nummer des Wurfs übereinstimmt. Hier kommt die Kritik, es sei ja ein anderes Problem, da beim Würfeln Zahlen mehrfach auftreten können. Dem stimmt die Gruppe zu, meint aber, dieses Beispiel diene nur der Veranschaulichung. Rechnen würden sie das Problem mit den Briefen. Auch das erläutern sie sehr schön mit Hilfe eines Baumdiagramms. Die in dem Gruppenauftrag angeregte Verallgemeinerung auf n Briefe war zu schwierig, um von der Gruppe gelöst zu werden. Nur die Anzahl aller Möglichkeiten konnten sie allgemein angeben, nicht jedoch die Anzahl der Fälle, in denen jeder Brief im falschen Umschlag steckt.

Am Freitag findet keine Morgengymnastik statt, dafür beginnen wir etwas eher mit dem Unterricht. Wir wollen sehen, wie viele Vorträge wir noch schaffen, bevor wir uns an den Hausputz machen. Mittag wollen wir schon abreisen.

3.Thema: Interessantes rund um den Würfel: Hier sollten verschiedene Würfelspiele bearbeitet werden. Warum ist beim Werfen mit 3 Würfeln Augensumme 10 leichter zu erreichen als Augensumme 9?

Interessant sind auch die chinesischen Würfel, die folgende Augenzahlen aufweisen:

Würfel A: 6, 6, 2, 2, 2, 2   Würfel B: 5, 5, 5, 5, 1, 1   Würfel C: 4, 4, 4, 3, 3, 3

Zu zeigen ist: Würfel A schlägt Würfel B (d.h. er zeigt im Mittel die höhere Augenzahl), Würfel B schlägt Würfel C und Würfel C schlägt Würfel A: Welcher Würfel gewinnt auf lange Sicht, wenn alle 3 Würfel geworfen werden?

Die erste Aufgabe stellt die Christine der Klasse, und zwar lässt sie alle möglichen Kombinationen für Augensumme 9 und 10 aufschreiben, es gibt jeweils 6 Würfelbilder. Die Klasse diskutiert dann wieder einmal das Problem, ob es dabei auf die Reihenfolge ankommt, und sie sind schnell wieder überzeugt davon, dass sie die Reihenfolge berücksichtigen müssen. Christine lässt die Klasse die Anzahl der möglichen Vertauschungen der einzelnen Wurfkombinationen berechnen. Zum Beispiel gibt es für 333 nur 1 Möglichkeit, für 423 aber 3*2*1 = 6 Möglichkeiten. Das führt sie mit der Klasse für alle Kombinationen durch, und sie erhalten so für Augensumme 9 insgesamt 25 Möglichkeiten, für Augensumme 10 jedoch 27 Möglichkeiten.

Susann bearbeitet mit der Klasse die Aufgabe mit den chinesischen Würfeln und lässt sich von der Klasse drei Baumdiagramme diktieren, die sie an die Tafel zeichnet. Am Ende zählen sie jeweils die Gewinnchancen zusammen und sie erhalten 55,6% Chance für A gegen B, 66,67% Chance für B gegen C und 66,67% Chance für C gegen A.

Vera bearbeitet mit der Klasse das Problem mit allen drei Würfeln. Dazu wird ein Baum mit 3 Stufen gezeichnet, eine Stufe für jeden Würfel. Es zeigt sich, dass Würfel B die größten Gewinnchancen hat, nämlich 44,4%.

Dann gibt es noch eine 4. Aufgabe, das Spiel Filzlaus. Ein Spieler darf 10 mal hintereinander würfeln. Er hört auf, sobald er eine 1 geworfen hat und erhält von der Bank einen Franken. Erzielt er keine 1, so er der Bank 5 Franken bezahlen. Brigitte fragt die Klasse: „Was denkt Ihr, ist das Spiel fair?“ Die Klasse vermutet, dass der Spieler draufzahlt. Auf die Frage, wie man das berechnen könnte, meint eine Schülerin, man müsse das Gegenteil berechnen, nämlich, dass er keine 1 wirft. Die Wahrscheinlichkeit für keine 1 in 10 Würfen ist 16,15%, d.h. der Spieler hat eine Gewinnchance von 83,85%. Ist das Spiel nun fair? Katrin sagt ja, 83,85% sei ungefähr das 5fache von 16,15. Sie rechnen nach: Bei 100 mal Spielen gewinnt der Spieler im Durchschnitt 83,85 Franken. Die Bank gewinnt 16,15 mal, das sind 16,15*5 = 80,75 Franken. Das Spiel ist also nicht fair, weil die Bank verliert.

4. Thema: Das Geburtstagsproblem: Wie viele Menschen müssen in einem Raum versammelt sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, großer als 50% ist? Rebecca schreibt zunächst folgendes an die Tafel:

- 366 Personen → 100% Chance, dass 2 Personen am selben Tag Geburtstag haben
- ~~183 Personen~~ → 50% Chance, dass 2 Personen am selben Tag Geburtstag haben

Achtung: nicht proportional!

Sie sagt, dass sie zunächst diesen Fehler gemacht hätten. Sie weist die Klasse darauf hin, dass man beachten muss, dass es mindestens 2 Personen sein sollen, es können also auch mehr sein. Sandra erklärt dann, dass sie aus diesem Grund das Gegenteil berechnen. Dies führen sie zunächst für 5 Personen durch. Die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 Personen keine zwei am gleichen Tag Geburtstag hat, ist

$$\frac{365}{365} * \frac{364}{365} * \frac{363}{365} * \frac{362}{365} * \frac{361}{365} = 97{,}29\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, beträgt also 2,71%. Cécile erklärt nun, dass die Personenzahl gesucht ist, bei der die Wahrscheinlichkeit, dass alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, niedriger werden als 50 %. Das ist bei 24 Personen der Fall. Da ist die Wahrscheinlichkeit 50,7%, dass mindestens 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben. Sibylle gibt anschließend noch eine allgemeine Formel in Abhängigkeit von der Personenzahl an.

Nun ist der Vormittag schon so weit fortgeschritten, dass wir an dieser Stelle abbrechen, da noch das ganze Haus geputzt werden muss. Die beiden fehlenden Vorträge müssen dann nächste Woche im regulären Unterricht nachgeholt werden.

Die Engadiner Woche im Rückblick und Überblick

Ouvertüre: Der Spieler: Wir spielen diesmal an drei Roulette-Tischen, was eine sehr angeregte Spielhöhlenatmosphäre erzeugt. Danach konzentrieren wir uns auf Dostojewski und seinen Roman "Der Spieler". Auf allgemeine Betrachtungen zum Thema "Spiel" verzichten wir.

I. Akt: Wir würfeln: Die für die SchülerInnen völlig neuen und interessanten Astragali animieren sie sehr schnell, in Gruppen herauszufinden, was für Spielregeln zu erlassen sind, um beim Werfen eines Astragalos einen Gewinn gerecht zu verteilen. Das führt zur Bestimmung der a-posteriori-Wahrscheinlichkeit mittels der relativen Häufigkeit. Zusätzlich wird auch mittels Experimentieren das Leibniz-Problem gelöst.

II. Akt: Geschichte der Wahrscheinlichkeit: Nach einem geschichtlichen Abriss der Geschichte der Wahrscheinlichkeit konzentrieren wir uns auf das de Méré-Problem, was uns zur zentralen Frage der mehrstufigen Zufallsexperimente, also auf die Multiplikationsregel führt. Die SchülerInnen lernen das Baumdiagramm und die beiden Pfadregeln kennen.

III. Akt: Und wenn die Bäume in den Himmel wachsen?: Aus einer früheren Stochastik-Bastelwoche habe ich 2 Galton-Bretter, die ich den SchülerInnen vorführe. Gemeinsam erarbeiten wir Regeln für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, dass eine Kugel den Weg in einen bestimmten Behälter findet. Wir verallgemeinern das Modell und erhalten so die Binomialverteilung.

Zwischenspiel: Wiederum spielen wir am Abend das „Ziegenproblem" in sehr heiterer, spielerischer Atmosphäre. Zu unserem Erstaunen kommt eine Schülerin schon sehr bald auf die richtige Idee und kann das Problem lösen!

IV. Akt: Geschichten rund um den Zufall: Die interessanten Probleme fordern die SchülerInnen heraus, und es gibt viele, sehr schöne Vorträge mit originellen eigenen Ideen und Aufgaben zu folgenden Themen:

- Das Rosinenproblem
- Die vertauschten Briefe
- Interessantes rund um den Würfel
- Das Geburtstagsproblem
- Problème des partis
- Das Pascal'sche Dreieck

Sonntag	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
	Morgengymnastik	Morgengymnastik	Morgengymnastik	Morgengymnastik	**IV. Akt: Fortsetzung**
	I. Akt: Wir würfeln	**II. Akt: Fortsetzung**	**III. Akt: Fortsetzung**	**IV. Akt: Geschichten rund um den Zufall**	Hausputz
	Mittagspause	*Mittagspause*	*Mittagspause*	*Mittagspause*	
Anreise	**II. Akt: Geschichte der Wahrscheinlichkeit**	**III. Akt: Und wenn die Bäume in den Himmel wachsen?**	Nachmittag und Abend zur freien Verfügung	Sport und Spiele	Heimreise
	Abendgymnastik	Abendgymnastik		**IV. Akt: Fortsetzung**	
Ouvertüre	Freier Abend	**Zwischenspiel: Das Ziegenproblem**		Freier Abend	

Kommentar: Die Dramaturgie ist in dieser vierten Aufführung bedeutend stimmiger. Es gibt keine abrupten Brüche mehr, dafür ist das Thema „Idealisten vs. Realisten" in der Arbeitswoche nicht mehr vorhanden. Im Anschluss an die Arbeitswoche, also im regulären, kursorischen Unterricht haben die SchülerInnen noch die restlichen Vorträge (IV. Akt) gehalten, und danach habe ich mit ihnen den

Erwartungswert eingeführt. Daraufhin habe ich eine Prüfung über den gesamten Stoff der Stochastik gemacht, die äußerst gute Ergebnisse gebracht hat. Nach dieser Prüfung habe ich den Versuch gemacht, nochmals auf die Arbeitswoche zurückzukommen und das Thema "Idealisten vs. Realisten" aufzugreifen. Der Grund dafür war, dass ich in Samedan immer wieder Gespräche von SchülerInnen am Rande mitbekommen habe, in denen es um philosophische, weltanschauliche Fragen ging, die anscheinend von unserer Arbeit mit der Stochastik ausgegangen sind. Ich habe den SchülerInnnen also den Auftrag gegeben, sich nochmals darüber Gedanken zu machen und sich an diese Gespräche zu erinnern. Während einer Lektion haben wir uns in der ganzen Klasse darüber unterhalten. Einzelne SchülerInnen haben sehr rege an der Diskussion teilgenommen, andere überhaupt nicht. Schon ganz zu Beginn der Diskussion sind die Begriffe Chaos und Ordnung gefallen, und eine Schülerin wusste gut Bescheid über die Philosophie Platons. Aus zwei Gründen ist dieses Vorhaben nicht optimal geglückt. Erstens waren seit der Arbeitswoche etwa fünf Wochen vergangen und zweitens spielen in dieser Klasse Mechanismen, die es einzelnen SchülerInnen verunmöglichen, vor der ganzen Klasse wirklich all das zu sagen, was ihnen wichtig ist.

Fazit

Das Stück „Stochastik“ ist nicht abgeschlossen. Es war konzipiert für eine Arbeitswoche, und es ist sehr gut geeignet, in einem abgeschlossenen Gefäß von einer solchen Woche aufgeführt zu werden. Es ist zu lang. Idealerweise wird es innerhalb der Arbeitswoche abgeschlossen, was uns aber in beiden Aufführungen nicht gelungen ist. Das Stück dauert ungefähr 30 bis 35 Lektionen, während ein Lehrstück ja 20 Lektionen nicht überschreiten soll. Die Überlänge macht es auch sehr schwierig, den Spannungsbogen aufrecht zu erhalten, was sich vor allem im kursorischen Unterricht als ein Ding der Unmöglichkeit gezeigt hat. Ungewohnt für ein Lehrstück sind die integrierten Übungsphasen, die ich aber auf Grund der positiven Erfahrungen nicht missen möchte.

Synopse der vier Aufführungen

4. Aufführung 11. Schuljahr Arbeitswoche	Der Spieler	Wir würfeln	Geschichte der Stochastik	Und wenn die Bäume in den Himmel wachsen?	Ziegenproblem	Geschichten rund um den Zufall	Idealisten vs. Realisten
2./3. Aufführg 12. Schuljahr kursorischer Unterricht	Der Spieler	Wir würfeln	Geschichte der Stochastik	Und wenn die Bäume in den Himmel wachsen?		Geschichten rund um den Zufall	
1. Aufführung 12. Schuljahr Arbeitswoche	Der Spieler	Wir würfeln	Ordnung und Chaos	Geschichte der Stochastik	Ziegenproblem/ Casinobesuch/ Binomialverteilung	Geschichten rund um den Zufall	
Aufführungen Wer und Wie / Aktfolge	**Ouvertüre**	**I. Akt**	**II. Akt**	**III. Akt**	**Zwischenspiel**	**IV. Akt**	**Nachspiel**

Feedback: Ich habe nach den beiden Arbeitswochen jeweils ein schriftliches Feedback von den SchülerInnen machen lassen. Dabei ist mehrheitlich ein sehr positives Echo über die Art und Weise des Unterrichts geäußert worden. Vor allem sind auch erstaunte Äußerungen über die intensive Arbeit in mehr als vierstündigen Arbeitsblöcken gekommen, die ihnen gar nicht lang vorgekommen sind, was die SchülerInnen im Voraus als unvorstellbar eingeschätzt hatten. So meinte Angie: "Diese Woche hat in mir die Freude an der Mathematik wieder geweckt!“ Und Tabea gefiel, dass sie "sich mal intensiv mit Mathe beschäftigen konnte!“ „Die ganze Woche hat mir gut gefallen“ sagt Damaris und hofft, „dass sie auch mit weiteren Klassen durchgeführt werden!“